УДК 378.147:519.87

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ ПРИ ИЗЛОЖЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В КОМПОНЕНТАХ ПРИРОДЫ»

[1]Сафронова Т.И., [2]Степанов В.И.

[1]Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, e-mail: mail@kubsau.ru;
[2]Алтайский экономико-юридический институт, Барнаул, e-mail: institut@aeli.altai.ru

В работе рассмотрены проблемы компетентностного подхода в образовании и возможности его использования в подготовке магистрантов. Большое внимание уделено влиянию математического моделирования процессов в компонентах природы на формирование компетенций будущих мелиораторов. Под математической моделью понимают абстрактный заменитель реальной системы, отражающий основные стороны ее строения или функционирования. С помощью математического моделирования можно делать прогнозы о результатах внешних воздействий на систему, что особенно важно, когда прямой эксперимент невозможен. Почва представляет собой сложное природное тело, подверженное бесчисленным внешним воздействиям. Поэтому при изучении почвенных процессов необходимо обращаться к математическим моделям. В статье рассмотрены особенности преподавания данной учебной дисциплины магистрантам, рассмотрены модели парной линейной регрессии и метод наименьших квадратов с проверкой выполнения четырех условий Гаусса – Маркова. Приведены примеры типовых вопросов для тестирования освоения дисциплины «математическое моделирование процессов в компонентах природы». Использованы детальные примеры, показывающие, как на определенном этапе обучения формируются те или иные компетенции. Авторы подчеркивают, что внесение в образовательный процесс профессионально ориентированных задач по математике позволяет повысить уровень математической подготовки.

Ключевые слова: компетентностный подход, математическое моделирование, парная регрессия

FORMATION OF PROFESSIONAL COMPETENCIES IN THE STATEMENT OF THE DISCIPLINE «MATHEMATICAL MODELING OF PROCESSES IN THE COMPONENTS OF NATURE»

[1]Safronova T.I., [2]Stepanov V.I.

[1]Kuban State Agrarian University, Krasnodar, e-mail: mail@kubsau.ru;
[2]Altai Institute of Economics and Law, Barnaul, e-mail: institut@aeli.altai.ru

The paper considers the problems of the competency-based approach in education and the possibility of its use in the preparation of undergraduates. Much attention is paid to the influence of mathematical modeling of processes in the components of nature on the formation of competencies of future land reclamators. A mathematical model is understood as an abstract substitute for a real system, reflecting the main aspects of its structure or functioning. Using mathematical modeling, you can make predictions about the results of external influences on the system, which is especially important when a direct experiment is impossible. Soil is a complex natural body subject to countless external influences. Therefore, when studying soil processes, it is necessary to turn to mathematical models. The article discusses the features of teaching this subject to undergraduates, considers paired linear regression models and the least squares method with verification of the fulfillment of four Gauss-Markov conditions. Examples of typical questions for testing the development of the discipline «mathematical modeling of processes in the components of nature» are given. We used detailed examples showing how certain competencies are formed at a certain stage of training. The authors emphasize that the introduction of professionally oriented problems in mathematics in the educational process can increase the level of mathematical preparation.

Keywords: competency-based approach, mathematical modeling, pairwise regression

Формирование профессиональной компетенции обеспечивает развитие общих компетенций студентов. Организация обучения математическому моделированию процессов в компонентах природы предполагает учет потребностей, интересов и личностных особенностей обучаемого [1, 2]. Магистрант выступает как полноправный участник процесса обучения.

Цель исследования: изучение особенностей формирования профессиональных компетенций в процессе обучения математике на основе проектно-исследовательской деятельности.

Сельскохозяйственная мелиорация – это изменение природной среды с целью ее улучшения для ведения сельского хозяйства (Н.Ф. Реймерс, 1990). В образовательной программе магистратуры 20.04.02 «Природообустройство и водопользование», в КубГАУ по профилю подготовки «Мелиорация, рекультивация и охрана земель» предусмотрена дисциплина «Математическое моделирование процессов в компонентах природы». Дисциплина знакомит студентов с методами статистической обработки результатов почвенных исследований, полевых опытов.

Материалы и методы исследования

Рассматривая тему «Обработка материалов многолетних наблюдений», особое внимание уделяем модели парной линейной регрессии и методу наименьших квадратов (МНК) [3].

Пусть случайная величина Y (зависимая переменная, результативный признак) статистически зависит от случайной или неслучайной величины X (независимой, объясняющей переменной). Функция регрессии, как известно, определяется по формуле

$$\varphi(x) = M(Y/X = x).$$

Обозначение в правой части равенства подчеркивает, что речь идет о значении случайной величины Y, когда величина X приняла значение x [4]. Эти значения подчинены некоторому закону распределения, зависящему от x и с центром распределения $M(y_x) = \varphi(x)$. Таким образом, разность $y_x - \varphi(x) = u_x$ есть случайная величина, для которой $M(u_x) = 0$. Другими словами, случайную величину y_x раскладываем на две составляющие: неслучайную $\varphi(x)$ и случайный остаточный член u_x, т.е.

$$y_x = \varphi(x) + u_x.$$

Последнее равенство выражает общую модель парной регрессии. Если известно, что $\varphi(x) = a + \beta x$, получим модель парной линейной регрессии

$$y_x = \alpha + \beta x_1 + u_x.$$

В рамках математической статистики законы распределений случайных величин нам неизвестны, но имеется ряд наблюдений, т.е. выборка объема $n:(x_1, y_1)$; $(x_2, y_2);\ldots;(x_n, y_n)$, и тогда

$$y_i = \alpha + \beta x + u_i.$$

В последней записи остаются неизвестными параметры a и β. По данным можно найти лишь оценки параметров a и β – соответственно a и b и получить выборочную оценку функции регрессии $\hat{y} = a + bx$, которую будем называть выборочной функцией регрессии

$$y_i = a + bx_i + e_i = y_i + e_i,$$

где $e_i = y_i - \hat{y}_i$ называются остатками [5, 6].

Существует несколько методов получения оценок a и b. Метод наименьших квадратов (МНК) заключается в подборе таких a и b, чтобы сумма квадратов остатков была минимальной.

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 \to \min,$$

$$b = \frac{Cov(x, y)}{Var(x)}, \quad a = \overline{y} - b\overline{x},$$

$$\sum_{i=l}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a - b\sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{y} - na - nb\overline{x} = 0.$$

Далее рассматриваем условия Гаусса – Маркова.

Вернемся к исходной модели $y = a + \beta x + u$

Установим связь между оценкой b и параметром β

$$b = \frac{Cov(x, y)}{Var(x)} = \frac{1}{Var(x)} Cov(x, a + \beta x + u) =$$

$$= \frac{1}{Var(x)}\big(Cov(x, a) + \beta Cov(x, x) + Cov(x, u)\big) = \beta + \frac{Cov(x, u)}{Var(x)}.$$

Здесь мы воспользовались свойством линейности ковариации по каждому аргументу и тем, что если один из аргументов ковариации есть постоянная величина, то ковариация равна нулю [7].

Действительно:

$$Cov(x, a) = \overline{xa} - \overline{x} \cdot \overline{a} = a\overline{x} - a\overline{x} = 0.$$

Оценка b – величина случайная, так как она состоит из двух слагаемых: β – величины неслучайной и $\dfrac{Cov(x,u)}{Var(x)}$ – случайной величины (u – величина случайная по условиям модели).

Аналогично можно показать случайный характер оценки a. Чтобы получать достоверные результаты при использовании полученных оценок, последние должны удовлетворять ряду требований, например, несмещенности, состоятельности, эффективности (минимальности дисперсии).

Чтобы эти требования выполнить, при нахождении коэффициентов регрессии по МНК для модели $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ проверяют выполнение четырех условий Гаусса – Маркова [7–9]:

1-е условие: $E(u_i) = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$. Это означает отсутствие систематического смещения у случайных членов во всех наблюдениях или, что $E(y_i) = a + \beta x_i$.

2-е условие: $D(u_i) = \sigma^2 = \text{const}$. Дисперсия случайного фактора (ошибки) должна быть постоянна во всех наблюдениях. Это условие называется гомоскедастичностью. Случай, когда условие гомоскедастичности не выполняется, называется гетероскедастичностью. В условиях гетероскедастичности оценки, полученные по МНК, будут неэффективными.

3-е условие: $\text{cov}(u_i, u_j) = 0$ при $i \neq j$. Это условие означает некоррелированность ошибок для разных наблюдений. Так как $cov(u_i, u_j) = E(u_i u_j) - E(u_i)E(u_j)$, то при выполнения первого условия, третье можно записать в виде $E(u_i u_j) = 0$ при $i \neq j$.

4-е условие: случайный член должен быть распределен независимо от объясняющих переменных, т.е. $cov(x_i, u_i) = 0$. Так как $E(u_i) = 0$, то

$$cov(x_i, u_i) = E\big((x_i - E(x_i))u_i\big) = E(x_i u_i) - E(x_i)E(u_i) = E(x_i u_i).$$

Следовательно, данное условие можно записать в виде $E(x_i u_i) = 0$.

Четвёртое условие автоматически выполняется, если x_i является детерминированной величиной, т.е. неслучайной.

При невыполнении данного условия оценки по МНК будут не только неэффективными, но и смещенными.

Докажем несмещенность оценок b и a в предположении, что x – детерминированная, т.е. неслучайная величина и, разумеется, выполнены остальные условия Гаусса – Маркова.

$$E(u_i) = 0, \text{ то } E(\overline{u}) = 0 \text{ и } E(\overline{xu}) = E\left(\frac{1}{n}\sum x_i u_i\right) = \frac{1}{n}\sum x_i \cdot E(u_i) = 0.$$

Откуда

$$E(Cov(x,u)) = E(\overline{xu} - \overline{x}\cdot\overline{u}) = E(\overline{xu}) - \overline{x}E(\overline{г}) = 0,$$

и

$$E(b) = E\left(\beta + \frac{Cov(x,u)}{Var(x)}\right) = E(\beta) + \frac{E(Cov(x,u))}{Var(x)} = \beta.$$

Несмещенность оценки b доказана.

Для оценки $a = \overline{y} - b\overline{x}$ заметим, что

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i \to \overline{y} = \beta\overline{x} + \overline{u} \to E(\overline{y}) = a + \beta\overline{x},$$

$$E(\alpha) = E(\overline{y} - b\overline{x}) = E(\overline{y}) - \overline{x}E(b) = \alpha + \beta\overline{x} - \overline{x}\beta = \alpha,$$

что доказывает несмещенность оценки a.

Во втором условии утверждается, что дисперсия случайного члена в каждом наблюдении должна быть постоянной

$$D(u_i) = \sigma^2 = \text{const}.$$

Это означает, что величина u примет какое-нибудь положительное или отрицательное значение с одинаковой для всех наблюдений вероятностью. Другими словами, величина u имеет одинаковый разброс, т.е. выполнено условие гомоскедастичности [10–12].

Если условие не выполняется, получим ситуацию гетероскедастичности, что означает неодинаковый разброс остатков. Гетероскедастичность приводит к тому, что оценки, найденные по МНК, хотя и останутся несмещенными, но будут неэффективными, т.е. существуют оценки с меньшей дисперсией, а применение t-статистики для определения значимости коэффициента регрессии может дать неверный результат.

Для модели $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ при выполнении условий Гаусса – Маркова оценки, полученные по методу наименьших квадратов, имеют наименьшую дисперсию в классе всех линейных несмещенных оценок.

Заметим, что оценка называется линейной, если она линейно выражается через $y_1, y_2, \ldots y_n$. Оценки a и b, найденные по МНК, являются линейными.

Цель регрессионного анализа состоит в объяснении поведения зависимой переменной y. В результате построения выборочного уравнения регрессии каждое значение y разлагается на две составляющие

$$y_i = \hat{y}_i + e_i = a + bx_i + e_i.$$

Величина $\hat{y}_i$ – расчетное или спрогнозированное значение y в наблюдении i, а остаток e_i есть расхождение между фактическим y_i и спрогнозированным $\hat{y}_i$. Это та часть, которая не объясняется с помощью уравнения регрессии. Разложим вариацию y на две составляющие: объясняемую уравнением регрессии и необъясняемую:

$$Var(y) = Var(\hat{y} + e) =$$
$$= Var(\hat{y}) + Var(e) + 2Cov(\hat{y}, e).$$

Используя ковариационные правила, найдём

$$Var(y) = Var(\hat{y}) + Var(e).$$

$Var(\hat{y})$ – часть вариации $V(y)$, которая объясняется уравнением регрессии, $Var(e)$ – необъясненная часть [13].

Коэффициент детерминации R^2 определяет качество оценки и вычисляется по формуле

$$R^2 = \frac{Var(\hat{y})}{Var(y)} = 1 - \frac{Var(e)}{Var(y)} =$$
$$= \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum e^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} =$$
$$= 1 - \frac{\sum e^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}.$$

И используется для оценки качества подбора линейной функции регрессии.

В линейной парной модели коэффициент детерминации R^2 равен квадрату коэффициента корреляции между y и $\hat{y}$

$$R^2 = r_{y\hat{y}}^2.$$

Коэффициент корреляции изменяется в пределах $-1 \le r_{y\hat{y}} \le 1$ и характеризует тесноту связи между y и $\hat{y}$. Коэффициент детерминации, следовательно, изменяется в пределах $0 \le R^2 \le 1$. Величина $1 - R^2$ характеризует долю дисперсии y, вызванную влиянием не учтенных в модели (случайных) факторов [14].

Результаты исследования и их обсуждение

Для проверки освоения материала магистрантам предлагаются типовые вопросы. Перед непосредственным выполнением заданий компьютерного тестирования необходимо внимательно изучить весь материал по данному блоку. Тестовые задания выполняются магистрантами самостоятельно без использования конспектов, учебников.

Типовые вопросы:

1. Что такое водопроницаемость почвы?

Ответ. *Это способность почвы пропускать воду.*

2. Что такое диффузия?

Ответ. *Перенос растворенных веществ.*

3. Чем вызвана диффузия?

Ответ. *Градиентом концентрации раствора*.

4. Почему закон распределения Пуассона называют законом редких событий?

Ответ. *Так как закон распределения Пуассона описывает случайную величину (число наступлений события в n независимых опытах) при n достаточно большом и при вероятности наступления в каждом опыте p достаточно малом.*

5. Статистические гипотезы делятся на:

Ответ. *Параметрические и непараметрические.*

6. Что называют статистическим доказательством?

Ответ. *Процесс использования выборки для проверки гипотезы.*

7. Какая гипотеза называется простой?

Ответ. *Которая содержит только одно предположение.*

8. В чем состоит ошибка второго рода при рассмотрении гипотез?

Ответ. *Ошибка второго рода возникает тогда, когда нуль-гипотеза принимается, хотя на самом деле верна альтернативная гипотеза.*

9. Какой используют критерий при проверке гипотезы о принадлежности двух выборок одной генеральной совокупности только на основании их средних?

Ответ. $t = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{n} + \dfrac{D(Y)}{n}}}$,

n – объем выборки X, m – объем выборки Y.

10. В чем состоит различие графиков интегральной функции распределения дискретной и непрерывной случайных величин?

Ответ. *График интегральной функции распределения дискретной случайной величины – разрывная (ступенча-*

тая) кривая, для непрерывной случайной величины – непрерывная.

Изучение дисциплины «Математическое моделирование процессов в компонентах природы» завершается сдачей семестрового зачета. Зачет является формой итогового контроля сформированности компетенций, знаний и умений, полученных на практических занятиях и в процессе самостоятельной работы студентов.

Преподаватель имеет право принять у студента зачет и/или экзамен только при наличии первичных документов по учету результатов текущей и промежуточной аттестации. Первичными документами являются электронные журналы посещаемости и успеваемости по дисциплине, результаты тестирования. Все первичные документы должны передаваться в деканат преподавателем лично не позднее следующего дня после проведения испытания промежуточной аттестации.

Выводы

Преподавание дисциплины «Математическое моделирование процессов в компонентах природы» магистрантам, обучающимся по специальностям сельскохозяйственного профиля не только дает интеллектуальное развитие, но и несет пропедевтическую функцию для дальнейшего обучения и формирования профессиональных компетенций.

Таким образом, исследование показало, что пропедевтика формирования профессиональных компетенций в процессе обучения математике на основе проектно-исследовательской деятельности способствует повышению качества обучения. Внесение в образовательный процесс профессионально ориентированных задач по математике позволяет повысить уровень математической подготовки и осуществлять пропедевтику формирования профессиональных компетенций при подготовке специалистов-мелиораторов.

Представленные в данной статье методы формирования компетенций направлены на повышение качества высшего образования и эффективности образовательного процесса и могут быть использованы в образовательном процессе других дисциплин естественно-математического цикла.

Список литературы

1. Сафронова Т.И., Приходько И.А. Управление мелиоративным состоянием почв для воспроизводства плодородия сельскохозяйственных земель Краснодарского края // Инженерное обеспечение инновационных технологий в АПК: сборник материалов Международной научно-практической конференции / Под общей ред. В.А. Солопова. 2018. С. 279–282.

2. Сафронова Т.И., Приходько И.А. Теоретическая модель оптимального проектирования агроландшафтов // Успехи современного естествознания. 2019. № 3–2. С. 204–209.

3. Efrosinin D., Farkhadov M., Sztrik J., Stepanova N. Reliability analysis of an aging unit with a controllable repair facility activation. Springer proceedings in mathematics and statistics. 2018. P. 403–417.

4. Сафронова Т.И., Соколова И.В. О преподавании элементов дисциплины «Математическое моделирование процессов в компонентах природы» // Высшее образование в аграрном вузе: проблемы и перспективы: сборник статей по материалам учебно-методической конференции / Отв. за вып. Д.С. Лилякова. 2018. С. 52–53.

5. Приходько И.А., Скорченко Ю.В. Влияние культуры риса на мелиоративное состояние почв рисовой оросительной системы // Науч. журнал Труды КубГАУ. 2011. Вып. 28. С. 181–184.

6. Сафронова Т.И., Соколова И.В. О дисциплине «Математическое моделирование и проектирование» на агрономическом факультете // Математика в образовании сборник статей. Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова; Межрегиональная общественная организация «Женщины в науке и образовании». Чебоксары, 2016. С. 88–92.

7. Hutmacher W. Key Competencies for Europe. Report of the Symposium (Berne, Switzerland, March 27-30, 1996). A Secondary Education for Europe Project. Council for Cultural Cooperation, Strasbourg (France). 1997. 72 p.

8. Кондратенко Л.Н., Соловьева Н.А. Факторы, систематизирующие изучение математики в вузе // Региональные особенности рыночных социально-экономических систем (структур) и их правовое обеспечение: материалы VIII-й Международной научно-практической конференции. 2017. С. 380–383.

9. Козубов А.С., Кондратенко Л.Н. Теория вероятностей и первый закон Менделя // Студенческие научные работы землеустроительного факультета: сборник статей по материалам Всероссийской студенческой научно-практической конференции / Отв. за выпуск И.В. Соколова. Краснодар, 2018. С. 43–47.

10. Кондратенко Л.Н., Селиванова М.А. О межпредметных связях математики с биологическими науками и ветеринарией // Научные исследования сельскохозяйственному производству: материалы Международной научно-практической конференции. 2018. С. 491–496.

11. Приходько И.А. Управление мелиоративным состоянием почв для экологической безопасности рисовой оросительной системы: автореф. дис. … канд. тех. наук: 06.01.02. Краснодар, 2008. 17 с.

12. Корч Е.А., Микенина П.С., Соколова И.В. Математическая модель прогнозирования финансового состояния предприятия // Студенческие научные работы инженерно-землеустроительного факультета: сборник статей по материалам студенческой научно-практической конференции. 2017. С. 63–67.

13. Подколзин О.А., Соколова И.В., Осипов А.В., Слюсарев В.Н. Мониторинг плодородия почв земель Краснодарского края // Труды Кубанского государственного аграрного университета. 2017. № 68. С. 117–124.

14. Лисуненко К.Э., Соколова И.В. Оценка состояния почв сельскохозяйственных районов Краснодарского края // Научное обеспечение агропромышленного комплекса: сборник статей по материалам 72-й научно-практической конференции студентов по итогам НИР за 2016. 2017. С. 231–234.