УДК 519.111.3

СОВРЕМЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРИКИ

Ледовская Я.О., Щёкина Е.О.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь, e-mail: inf@stgau.ru

В статье рассмотрены основные направления применения комбинаторных задач, описываются исторические моменты появления задач комбинаторики. Авторами упоминаются книга Джеймса Андерсона «Дискретная математика и комбинаторика» и фундаментальный труд Г.Ф. Лейбница «Рассуждения о комбинаторном искусстве». Рассматриваются правила сложения и умножения в комбинаторике. Раскрываются различные виды соединения и показано как используется бином Ньютона. Рассматриваются задачи о числе размещений без повторений и о числе размещений с повторениями, перестановки без повторений и перестановки с повторениями на конкретных практических примерах. Авторы в статье указывают на тот факт, что комбинаторика может быть применена в различных сторонах нашей повседневной жизни, например, мы сталкиваемся с данным понятием в лингвистике при рассмотрении вариантов комбинации букв, перетекающих в слова, в медицине, при расшифровке кода ДНК, выявляя таким путем наследственную предрасположенность человека к определенным заболеваниям, в экономической практике для решения важных экономических задач, специалисты часто применяют математическую модель анализа различных ситуаций.

Ключевые слова: комбинаторные задачи, правила сложения и умножения в комбинаторике, различные виды соединения, бином Ньютона, задача о числе размещений без повторений, задача о числе размещений с повторениями, перестановки без повторений, перестановки с повторениями

MODERN TRENDS IN THE APPLICATION OF COMBINATORICS TASKS

Shchekina E.O., Ledovskaya I.O.

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Stavropol State Agrarian University, Stavropole-mail: inf@stgau.ru

The article describes the main areas of application of combinatorial problems, describes the historical moments of the emergence of combinatorial problems. The authors mention James Anderson’s book Discrete Mathematics and Combinatorics and the fundamental work of G.F. Leibniz «Discourses on combinatorial art.» The rules of addition and multiplication in combinatorics are considered. Various types of compounds are disclosed and it is shown how the Newton bin is used. We consider the problem of the number of placements without repetitions and the number of placements with repetitions, permutations without repetitions and permutations with repetitions on specific practical examples. The authors of the article point to the fact that combinatorics can be applied in various aspects of our daily life, for example, we are confronted with this concept in linguistics when considering options for a combination of letters flowing into words, in medicine, when deciphering a DNA code, identifying in this way hereditary predisposition of a person to certain diseases, in economic practice for solving important economic problems, specialists often use a mathematical model for analyzing various situations.

Key words: combinatorial problems, rules of addition and multiplication in combinatorics, various types of compound, binomial theorem, the problem of the number of placements without repetitions, the problem of the number of placements with repetitions, permutations without repetitions, permutations with repetitions

Людям часто приходится сталкиваться с проблемой, когда нужно подсчитать число всех возможных способов расположения предметов и исхода какого-либо события. Человеку требуется находить всевозможные варианты, которые в последующем складываются в самые различные комбинации. С поиском комбинаций такого рода приходится иметь дело представителям многих профессий. Например, логисту, при составлении расписания движения, учителю, при назначении дежурств в классе, химику, выбирающему из многих комбинаций химических элементов наилучшую.

С задачами комбинаторики людям приходилось сталкиваться еще в глубокой древности. Дальнейшее развитие комбинаторики произошло в связи с появлением таких игр как: шашки, домино и шахматы. Для оценки шанса на победу, опытные игроки применяли технику вычисления общего количества ходов, включая как положительные, так и отрицательные исходы. В результате создавался набор комбинаций, которые способствовали увеличению вероятности выигрыша. В математической науке исследования такого рода представляют особую дисциплину – теорию вероятностей, рассчитать которую без комбинаторики будет крайне затруднительно [1, 2].

В настоящие время комбинаторика получила обширное распространение и имеет огромное значение во всевозможных областях жизнедеятельности. С комбинаторными величинами сталкиваются представители многих профессий: ученый – химик, биолог, конструктор, диспетчер, астролог, экономист. Тенденция усиления интереса к комбинаторике обуславливается бурным развитием кибернетики и вычислительной техники. Понятие комбинаторика представляет собой раздел математики, базирующийся на изучении всевозможных сочетаний, перестановок, размещений, перечислений тех или иных элементов. Главная задача комбинаторики состоит в выборе правильной комбинаторной конфигурации, которая определяет метод возведения конкретной конструкции из элементов исходного множества. Примерами комбинаторных конфигураций являются блок-схемы и латинские квадраты, факториалы [3].

В книге Джеймса Андерсона «Дискретная математика и комбинаторика» выделяют следующие основные операции и связанные с ними задачи комбинаторики:

1) образование упорядоченных множеств, составление перестановок;

2) образование подмножеств, путем составления сочетаний;

3) образование упорядоченных подмножеств – составление размещений.

Все разнообразие комбинаторных формул может быть выведено из двух основных утверждений, касающихся конечных множеств – правило суммы и правило произведения.

Множество является упорядоченным, если каждому его элементу соответствует некоторое число от 1 до n, где n – число элементов множества.

Рассмотрим правила сложения и умножения в комбинаторике [4].

Правило суммы. Если два действия A и B взаимно исключают друг друга, причем действие C можно выполнить m способами, а B – n способами, то выполнить одно любое из этих действий (либо A, либо B) можно n + m способами.

Правило произведения. Пусть требуется выполнить последовательно k действий. Если первое действие можно выполнить n1 способами, второе действие n2 способами, третье – n3 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить nk способами, то все k действий вместе могут быть выполнены:

$$N = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k .$$

Раскроем такие виды соединения как сочетания без повторений и сочетания с повторениями.

Классической задачей комбинаторики является задача о числе сочетаний без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать m из n различных предметов? [3]

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} .$$

Рассмотрим задачу о числе сочетаний с повторениями: имеется по r одинаковых предметов каждого из n различных типов; сколькими способами можно выбрать m из этих предметов?

$$C_n^{-m} = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(\mathrm{n}-1)!} .$$

Сочетание играет важную роль в математической науке, очень часто оно используется в биноме Ньютона.

Бином Ньютона – формула разложения натуральной степени двучлена $(a+b)^n$ в многочлен. Многочлены, являющиеся суммой двух слагаемых, называются биномами. Их можно представить в следующем виде:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^{\,1} a^{n-1} b + C_n^{\,2} a^{n-2} b^2 + \ldots +$$
$$+ C_n^{\,k} a^{n-k} b^k + \ldots C_n^{\,n-1} a b^{n-1} + b^n .$$

Неотрицательные целые числа $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}$ называются биномиальными коэффициентами [5].

Формула была выведена английским математиком Исааком Ньютоном для общего случая, когда показатель степени будет произвольным, комплексным или же действительным числом.

Определить значения биномиальных коэффициентов для любой степени можно с помощью таблицы, которая получила название треугольника Паскаля.

В комбинаторике также используется факториал, который определяет натуральное число n как произведение всех натуральных чисел от 1 до *n* и задается следующей формулой:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times n .$$

Для примера вычислим факториалы 4 и 6 [6, 7]

Решение:

4! = 1*2*3*4 = 24

6! = 1*2*3*4*5*6 = 720

Рассмотрим такие виды соединения как размещения без повторений и размещения с повторениями.

Задача о числе размещений без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n различных предметов?

Еще одной составляющей комбинаторики является задача о числе размещений с повторениями, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n предметов, среди которых есть одинаковые?

$$\bar{A}_n^m = n^m .$$

Рассмотрим перестановки без повторений и перестановки с повторениями.

Задачу о числе перестановок без повторения можно выразить вопросом: сколькими способами можно разместить n различных предметов на n различных местах?

$$P_n = n!$$

Для случая, когда среди выбираемых n элементов есть одинаковые, задачу о числе перестановок с повторениями можно выразить вопросом: сколькими способами можно переставить n предметов, расположенных на n различных местах, если среди n предметов имеются k различных типов ($k < n$), т. е. есть одинаковые предметы.

Рассмотрим на конкретных практических примерах как работают некоторые правила в комбинаторике [8].

Пример № 1. В магазине подарков в преддверии Нового года проходит акция: 2 набора конфет по цене одного. Маша и Настя решили воспользоваться этим специальным предложением. Им необходимо выбрать 4 из 10 имеющихся различных наборов. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Из 10 наборов конфет нужно выбрать 4, причем порядок выбора не имеет значения. Таким образом, применяя правило комбинаторики, а именно, сочетания без повторений, нужно найти число сочетаний из 10 элементов по 4:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{6! \times 4!} = 210$$

Ответ: 210 способов.

Таким образом, комбинаторика может быть применена в различных сторонах нашей повседневной жизни. Так, к примеру, мы сталкиваемся с данным понятием даже в лингвистике при рассмотрении вариантов комбинации букв, перетекающих в слова. Высокие технологии помогают применять комбинаторику даже в медицине, при расшифровке кода ДНК, выявляя таким путем наследственную предрасположенность человека к определенным заболеваниям. Но все же главной родоначальной областью применения комбинаторики является математика, поскольку сам термин был введен в математический обиход еще немецким философом Г.Ф. Лейбницем, который в 1666 году закрепил само понятие «комбинаторика» в своем фундаментальном труде «Рассуждения о комбинаторном искусстве». Более того, отдельные элементы комбинаторики, осуществляющие различные функции, играют существенную роль в экономической практике. Для решения важных экономических задач, специалисты часто применяют математическую модель анализа различных ситуаций. Методы комбинаторики используются для нужд управления, планирования, бухгалтерского учета, статистики и экономического анализа. Они позволяют решить сложные проблемы экономического развития как на микро-, так и на макроуровнях. Путем комбинации различных данных, мы можем, на примере конкретного предприятия, рассчитать вероятность возникновения рисков, связанных с понесением убытков, потерей бизнеса и деловой репутации [9].

Людей, занимающихся анализом и расчетно-экономической деятельностью, называют аналитиками. Они могут рассчитать потенциальные возможности той или иной фирмы посредством использования свойств комбинаторики. Специалисты проводят мониторинг рынка, выявляют уровень цен и конкурентоспособность отдельно взятого хозяйственного субъекта. Аналитики занимаются сбором ценной информации и выявляют дальнейшие тенденции изменений на рынке. Множество финансовых учреждений на сегодняшний день зачастую просто нуждаются в аналитиках, поскольку они делают прогнозы на стоимость ценных бумаг, драгоценных металлов, недвижимости, а также таких важных социально-экономических проблем, таких как: уровень безработицы в стране, инфляция. Таким образом, важнейшие элементы комбинаторики, состоящие из расчетно-аналитической работы, статистики, вероятностного наступления какого-либо события, позволяют вовремя выявлять существенные экономические проблемы и предотвращать их возникновение в будущем.

Список литературы

1. Крицкий О.Л., Михальчук А.А., Трифонов А.Ю., Шинкеев М.Л. Теория вероятностей и математическая статистика для технических университетов. I. Теория вероятностей: учебное пособие. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. 212 с.

2. Жукова В.А., Гулай Т.А., Долгополова А.Ф. Решение экономических задач с помощью экономико-математических моделей // Глобальные тенденции и национальные

вызовы научно-технологического развития в условиях инновационной экономики: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. 2018. С. 211–213.

3. Волгиянина А.Ф., Сопнева М.В. Применение комбинаторики при решении агрономических задач // Аналитические и финансово-экономические аспекты развития региональной экономики: сборник научных трудов по материалам 82-ой ежегодной научно-практической конференции молодых ученых. 2017. С. 69–74.

4. Гулай Т.А., Долголопова А.Ф., Жукова В.А., Мелешко С.В., Неведомская И.А. Элементы теории вероятностей и математической статистики: учебное пособие. Ставрополь, 2017. 116 с.

5. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б., Мелешко С.В. Теория вероятностей и математическая статистика // Международный журнал экспериментального образования. 2012. № 11. С. 51–52.

6. Бондаренко В.А., Мамаев И.И., Сахнюк П.А., Сахнюк Т.И. Теоретико-вероятностные модели в задачах экономики природопользования // Экономические, инновационные и информационные проблемы развития региона: материалы Международной научно-практической конференции. 2014. С. 62–65.

7. Мамаев И.И., Жукова В.А. Модели азартных игр на занятиях по теории вероятностей // Экономические и информационные аспекты развития региона: теория и практика: Международная научно-практическая конференция. Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, 2015. С. 172–176.

8. Бондаренко В.А., Донец З.Г., Цыплакова О.Н. Теория игр и финансовые рынки // Финансово-экономические и учетно-аналитические проблемы развития региона: материалы Ежегодной 78-й научно-практической конференции. 2014. С. 231–236.

9. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Жукова В.А. Особенности построения модели оценки оптимальности по Парето // Аграрная наука, творчество, рост: сборник научных трудов по материалам VIII Международной научно-практической конференции. 2018. С. 136–139.