

УДК 536.24:538.4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Алексеева И.И., Симоновский А.Я.

ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет», Ставрополь,
e-mail: inf@stgau.ru

Статья посвящена разработке математической модели, описывающей распределение магнитной жидкости вблизи наружной поверхности полого ферромагнитного цилиндра, а также постановке эксперимента по выяснению точности описания данной моделью этого распределения. В основу модели положены уравнения феррогидродинамики, характеризующую условия равновесия элементы объема магнитной жидкости в однородном внешнем магнитном поле. Уравнения записаны при следующих допущениях. Внешнее магнитное поле, в котором находится распределение свободной поверхности магнитной жидкости, считается большим и слабо искажающимся намагничивающейся жидкости. При этом намагниченность магнитной жидкости в данном магнитном поле считается равной намагниченности насыщения жидкости. Дифференциальные уравнения распределения свободной поверхности магнитной жидкости в принятых допущениях сводятся к биквадратному алгебраическому уравнению, связывающему точки свободной поверхности магнитной жидкости и азимутальным углом полярной системы координат характеризующий положение этих точек. Поставлен эксперимент подтверждающий справедливость разработанной математической модели.

Ключевые слова: математическое моделирование, магнетизм, магнитная жидкость, фигуры равновесия, механика жидкости

MATHEMATICAL AND EXPERIMENTAL MODELING OF THE FREE SURFACE OF MAGNETIC LIQUID IN THE VICINITY OF A FLOATING CYLINDER

Alekseeva I.I., Simonovsky A.Ya.

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Stavropol State Agrarian
University, Stavropol, e-mail: inf@stgau.ru

The article is devoted to the development of a mathematical model describing the distribution of magnetic fluid near the outer surface of a hollow ferromagnetic cylinder, as well as setting up an experiment to determine the accuracy of the description of this distribution by this model. The model is based on the equations of ferrohydrodynamics, which characterizes the equilibrium conditions, the elements of the volume of magnetic fluid in a uniform external magnetic field. The equations are written with the following assumptions. The external magnetic field, in which the distribution of the free surface of the magnetic fluid is located, is considered large and weakly distorted by a magnetizable fluid. In this case, the magnetization of a magnetic fluid in a given magnetic field is considered equal to the saturation magnetization of the fluid. The differential equations of the distribution of the free surface of a magnetic fluid in the accepted assumptions are reduced to a biquadratic algebraic equation connecting the points of the free surface of the magnetic fluid and the azimuthal angle of the polar coordinate system characterizing the position of these points. An experiment confirms the validity of the developed mathematical model.

Keywords: mathematical modeling, magnetism, magnetic fluid, equilibrium figures, fluid mechanics

Постановка задачи. Определим форму свободной поверхности магнитной жидкости, располагающейся вокруг вертикального полого цилиндра с бесконечно большой магнитной проницаемостью. Будем считать цилиндр безмерно длинным. Магнитное поле в удалении от цилиндра однородное. Вектор приложенного внешнего неизменного магнитного поля \vec{H}_0 ориентирован перпендикулярно оси цилиндра и вектору силы тяжести.

Уравнения данной задачи [1–3] в приближении феррогидродинамики – это уравнение (1) магнитного поля H для областей пространства, занятых непосредственно магнитной жидкостью и уравнения равновесия магнитной жидкости.

Уравнение равновесия:

$$-\nabla p + \mu_0 (\vec{M} \nabla) \vec{H} + \rho \vec{g} = 0. \quad (1)$$

В данном случае $\mu = \mu(H)$ – относительная магнитная проницаемость магнитной жидкости, p – давление в магнитной жидкости, \vec{M} – вектор намагниченности магнитной жидкости.

Раздел магнитная жидкость – воздух, на свободной поверхности, приводит к соответствию:

$$p - p_\epsilon = -\frac{1}{2} \mu_0 M_n^2 + \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (2)$$

Тут p_a – давление в воздухе, p – давление в магнитной жидкости вблизи границы

раздела магнитная жидкость – воздух, M_n – нормальная компонента намагниченности на свободной плоскости магнитной жидкости, σ – поверхностное натяжение, R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны поверхности магнитной жидкости.

Из этого следует уравнение свободной поверхности магнитной жидкости:

$$\rho g z - \mu_0 \int_0^H M dH - \frac{1}{2} \mu_0 M_n^2 + \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \text{const.} \quad (3)$$

Здесь z – вертикальная координата.

При намагниченности магнитной жидкости, имеющей порядок величины $M_s \approx 10^4$ А/м, поверхностном натяжении магнитной жидкости $\sigma \approx 10^{-2}$ Н/м, специфических радиусах кривизны R_1 и $R_2 \approx 10^{-3}$ м, имеют соответственно порядки величин $10^2 : 10 : 1$. [4, 5].

Учитывая данную характеристику, уравнение (3) для свободной поверхности магнитной жидкости представится в следующем виде:

$$\rho g z - \mu_0 M_s H = \text{const.} \quad (4)$$

Подставляя в уравнение (4) поле (5) полого цилиндра:

$$H_r = H_0 \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) \cos \vartheta;$$

$$H_r = H_0 \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \sin \vartheta. \quad (5)$$

Найдем выражение для формы свободной поверхности магнитной жидкости, охватывающую наружную часть полого цилиндра:

$$\left[H_0^2 - \left(\frac{\rho g z}{\mu_0 M_s} - c \right)^2 \right] r^4 + 2R^2 H_0^2 \cos 2\vartheta r^2 + H_0^2 R^4 = 0. \quad (6)$$

Задавая в (6) z меняющиеся от 0 до L (L – длина цилиндра), получим биквадратное уравнение для r от ϑ , окружающее форму сечения объема магнитной жидкости плоскостью $z = \text{const}$.

Графики указанных сечений, когда размер внешнего магнитного поля равен $H_0 = 105$ кА/м, при разных значениях z и c показаны на рис. 1, а–в. Направление магнитного поля \vec{H}_0 представлено на фигурах стрелкой. На рисунках продемонстриро-

ваны картины размещения свободной поверхности магнитной жидкости для первого квадранта плоскости сечения $z = \text{const}$. Кривые на рис. 1, а– в – геометрические места точек, описываемых уравнением (6) при значениях $c = -\sqrt{0,6}H_0$; $-\sqrt{0,99}H_0$; $-\sqrt{2}H_0$ соответственно. Линии 1, 2, 3 на данных фигурах построены для значений параметра $z = 0$, $z = 0,01$ м, $z = 0,02$ м соответственно.

На рис. 1, а изображено расположение свободной поверхности магнитной жидкости, когда цилиндр охватывал малый объем магнитной жидкости.

Штриховкой на рис. 1, а, представлена зона, занятая магнитной жидкостью. Примечательно, что сечение объема магнитной жидкости плоскостью $z = \text{const}$ возрастает в направлении силы тяжести (от линии 1 к линии 3).

На рис. 1, б, наибольшему объему магнитной жидкости в кювете соответствует, объем магнитной жидкости в сечении плоскостью $z = \text{const}$. Линии 1, 2 являются границей раздела магнитная жидкость – воздух в плоскости верхнего торца цилиндра в сечении $z = 0$ и в среднем сечении цилиндра $z = 0,01$ м. Указанные штриховкой области, заняты магнитной жидкостью. За пределами – воздух. Границей раздела магнитная жидкость – воздух является линия 3.

С увеличением объема магнитной жидкости, в магнитной жидкости, охватывающий цилиндр, образуются две сужающиеся книзу воронки – воздушные полости, что и показано на рис. 1, в.

Не заштрихованная зона, ограниченная линиями 1, 2, 3, не занята магнитной жидкостью.

Заштрихованная область занята жидкостью. Сформировавшаяся воронка, сужается в направлении силы тяжести.

Таким образом, расчеты демонстрируют, что с сокращением параметра c область свободная от магнитной жидкости на дне кюветы, уменьшается до вырождения. Вершина воронки поднимается в направлении верхнего торца цилиндра [6, 7].

В процессе данной работы, проводился эксперимент, в котором рассматривалось, распределение свободной поверхности магнитной жидкости в окрестности наружной и внутренней поверхностей полого ферромагнитного.

Полый ферромагнитный цилиндр с высотой, равной наружному диаметру, располагался на дне немагнитной цилиндрической кюветы. Состав масштаба полого цилиндра, используемого в описываемом эксперименте: наружный диаметр и высота 20 мм, вну-

тренний диаметр 12 мм. Размеры кюветы: диаметр 100 мм, высота 70 мм. Дном кюветы являлось матовое стекло. Используемая система кюветы позволяла совершать подсветку снизу, что обеспечивало более контрастное выделение границы растекшейся по дну кюветы магнитной жидкости.

Фотография образца при виде сверху, показана на рис. 2. Для более удобной характеристики областей, в окрестности которых жидкость по-разному прилегает к верхней части цилиндра, введем угол ϑ – угол между направлением внешнего приложенного магнитного поля \vec{H}_0 и направлением радиус-вектора \vec{r} , проведенного из точки,

расположенной на оси цилиндра в плоскости поперечного сечения, до определенной точки внешней поверхности цилиндра. Далее будем называть области поверхности цилиндра, для которых угол ϑ равен 0° или 180° – полюсами цилиндра, а участки поверхности цилиндра, для которых угол ϑ составлял $\pm 90^\circ$ – боковыми участками поверхности цилиндра.

Округлый просвет полости цилиндра, виден в центре рис. 2. В поперечном сечении столбики магнитной жидкости приобретают форму, близкую к эллиптической. Боковые поверхности цилиндра полностью свободны от магнитной жидкости.

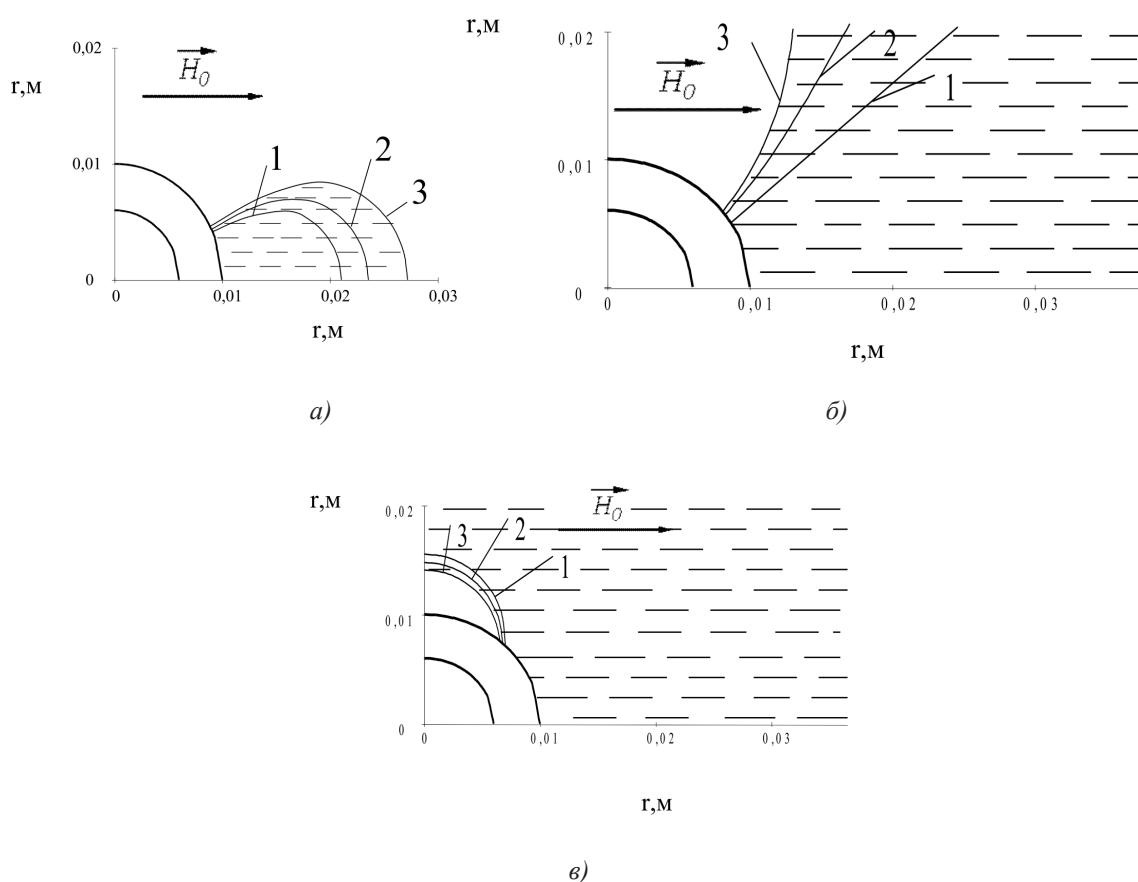


Рис. 1. а. Фигура равновесия свободной поверхности магнитной жидкости, в однородном внешнем магнитном поле H_0 , полученные из уравнения (6) при $c = -\sqrt{0,6}H_0$.

Линии 1, 2, 3 – границы свободной поверхности жидкости вблизи верхнего торца, среднего сечения и нижнего торца цилиндра.

б. Фигура равновесия свободной поверхности магнитной жидкости, в однородном внешнем магнитном поле H_0 , полученная путем расчета по уравнению (6) при $c = -\sqrt{0,99}H_0$.

Линии 1, 2, 3 соответствуют границе жидкости вблизи верхнего торца, среднего сечения и нижнего торца цилиндра.

в. Фигура равновесия свободной поверхности магнитной жидкости, в однородном внешнем магнитном поле H_0 , полученная путем расчета по уравнению (6) при $c = -\sqrt{2}H_0$.

Линии 1, 2, 3 соответствуют границе жидкости вблизи верхнего торца, среднего сечения и нижнего торца цилиндра



Рис. 2. Фотография полого цилиндрического образца, окруженного магнитной жидкостью суммарным объемом 2,6 см³

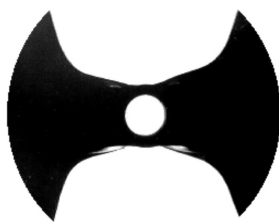


Рис. 3. Фотография полого цилиндрического образца, окруженного магнитной жидкостью суммарным объемом 54 см³

При последующем увеличении объема магнитной жидкости в кювете (рис. 3) лужицы в придонной части столбиков магнитной жидкости в окрестности полюсов цилиндра растекаются непосредственно по дну кюветы в направлении полюсов электромагнита. Высота столба жидкости на удалении от цилиндра более, чем на величину его диаметра, в направлении полюсов электромагнита увеличивается. Но, боковые части поверхности цилиндра остаются свободными от магнитной жидкости. Сохраняется неизменной и ширина раскрытия полосок боковой поверхности цилиндра, свободной от магнитной жидкости. Описываемые области боковой поверхности цилиндра, свободные от магнитной жидкости.



Рис. 4. Фотография полого цилиндрического образца, окруженного магнитной жидкостью суммарным объемом 159 см³

При достижении суммарного объема магнитной жидкости в кювете 159 см³, на фотографиях рис. 4, наблюдается, что

на месте образования шеек-перетяжек, в окрестности боковых участков плоскости цилиндра левая и правая области магнитной жидкости в кювете соединяются, и в объеме магнитной жидкости формируются воздушные полости.

Эксперименты продемонстрировали, что при увеличении интенсивности наружного приложенного магнитного поля в окрестности боковых участков поверхности цилиндра воздушные полости возрождались в противоположном порядке. Появились конические выемки. Вслед за этим, по образующей цилиндра, вершина конических выемок спускалась вниз. Затем, на дне кюветы, возле нижнего торца цилиндра, на дне кюветы сформировался просвет полости. После этого, полость снова обретала вид усеченного конуса, уменьшающегося в направлении силы тяжести.

Осуществлялось численное сопоставление формы свободной поверхности магнитной жидкости, находящейся вокруг цилиндра, полученной в эксперименте и описываемой уравнением (6). Из эксперимента определялся радиус – вектор точки свободной поверхности магнитной жидкости в и нижнего торца цилиндра ($z = 0,02$ м) при значении угла $\vartheta = 0^\circ$. Найденное значение радиуса – вектора позволило определить параметр c из уравнения (6) определялся параметр s . Это значение величины s использовалось при построении границы раздела магнитная жидкость – воздух для значений $0 < \vartheta < 90^\circ$. Результаты представлены в таблице. Исходя из таблицы, можно увидеть, что различие экспериментальных и теоретических значений радиуса растет с увеличением угла ϑ . Хотя это различие не превышает 8%.

Значения радиус-векторов точек свободной поверхности магнитной жидкости, окружающей цилиндр во внешнем магнитном поле $H_0 = 105$ кА/м, полученные экспериментально ($r_{\text{экс}}$) и по решению уравнения (6) ($r_{\text{теор}}$)

J	$r_{\text{экс}} \cdot 10^{-3}, \text{ м}$	$r_{\text{теор}} \cdot 10^{-3}, \text{ м}$	Относительная погрешность, %
0	22,1	22,1	0,0
5	21,7	21,9	0,9
10	21,7	21,5	0,9
15	20,1	20,8	3,4
20	19,1	19,9	4,0
25	17,9	18,6	3,8
30	16,6	17,2	3,5
35	15,4	15,5	0,6
40	14,3	13,8	3,6
45	13,1	12,2	7,4

Заключение

Найденное теоретически распределение магнитного поля, дает объяснение тому, что силами магнитного поля из полости цилиндра жидкость выталкивается. В полости цилиндра магнитное поле близко к нулю. Используемый в опыте цилиндр имел ограниченную длину, вблизи его торцов поле было неравным нулю. В неоднородном магнитном поле на магнитную жидкость действует сила, направленная в сторону большего поля. Магнитная жидкость из полости цилиндра и выталкивалась указанной силой.

Работа выполнялась при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00037).

Список литературы

1. Гогосов В.В., Клименко М.Ю., Симоновский А.Я. Влияние магнитного поля и температуры нагрева полого намагничивающегося цилиндра на тепломассоперенос при охлаждении цилиндра в магнитной жидкости // Магнитная Гидродинамика. 2000. Т. 36. № 3. С. 251–276.
2. Клименко М.Ю. диссертация на тему «Тепло- и массоперенос при охлаждении полого намагничивающегося цилиндра в магнитной жидкости»
3. Налетова В.А., Турков В.А., Пелевина Д.А. Экспериментальное и теоретическое исследование объема магнитной жидкости вокруг твердого намагничивающегося тела в однородном магнитном поле. В сб.: Тезисы докладов «Российская конференция по Магнитной Гидродинамике». Пермь, 2012. С. 73.
4. Налетова В.А., Турков В.А., Пелевина Д.А., Калмыков С.А. Деформация поверхности магнитной жидкости, содержащей намагничивающееся тело, в однородном магнитном поле. В сб.: Тезисы докладов XIV школы – семинара «Современные проблемы аэрогидродинамики». Сочи, 2006. С. 71.
5. Verkhovsky S.N., Mirkin L.I., Simonovsky A.Ya. Structure and properties of steels after controlled quenching in a magnetic fluid. Physics and Chemistry of Materials Processing. 1990. no. 2. P. 127–132.
6. Gogosov V.V., Simonovskii A.Ya. On locally inhomogeneous cooling during quenching in a magnetic fluid. USSR Academy Sci Reports: Fluid and Gas Mechanics. 1989. no. 2. P. 3.
7. Gogosov V.V., Simonovskii A.Ya., Smolkin R.D. Quenching and separation in magnetic fluids. JMMM. 1990. vol. 85. no. 1–3. P. 227.