

УДК 681.5.01:658.512.2.011.56 ББК 30

## ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ В ОБЛАСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Супотницкий Е.С., Курносков В.Е., Андреева Т.В.

*Пензенский государственный технологический университет, Пенза,  
e-mail: vladimirkurnosov@rambler.ru*

Предлагается способ решения задач топологической оптимизации конструкций. Приведено описание модели области проектирования. Используется дискретная логико-математическая модель для представления формы конструкции в области проектирования. Описание топологии конструкции выполнено на основе переменных импликативной алгебры выбора Л.И. Волгина. Переменные импликативной алгебры выбора введены как переменные проектирования и для описания топологии конструкции. Рассмотрены различные алгоритмы решения задач топологической оптимизации. Представлены математические выражения для топологической оптимизации на основе введения удаления и перераспределения материала. Рассмотрен способ формирования топологии конструкции в области проектирования. Разработан метод автоматического формирования системы уравнений для вычисления механических напряжений и деформаций при статических воздействиях. Используется вариационная формулировка метода конечных элементов. Показано решение задачи топологической оптимизации в области проектирования. Заданы механические воздействия. Напряженно-деформированное состояние вычисляется по результатам решения дифференциальных уравнений теории упругости. Топологическая оптимизация выполняется по энергии деформации материала. Цель решения состоит в выравнивании распределения энергии деформации по объему материала и в получении оптимальной топологии конструкции. Предлагаемый способ решения задач топологической оптимизации позволяет решать задачи оптимального проектирования конструкций по заданным механическим и тепловым воздействиям.

**Ключевые слова:** топологическая оптимизация, информационные технологии, численные методы, вариационная формулировка, метод конечных элементов, метод конечных разностей, область проектирования, анализ синтез, дискретные модели, тепловое поле, механические напряжения

## TOPOLOGICAL OPTIMIZATION OF DESIGNS IN THE FIELD OF DESIGNING

Supotnitsky E.S., Kurmosov V.E., Andreyeva T.V.

*Penza State Technological University, Penza, e-mail: vladimirkurnosov@rambler.ru*

The way of a problem solving of topological optimisation of designs is offered. The description of model of area of designing is resulted. The discrete logical-mathematical model for representation of the form of a design in the field of designing is used. The exposition of topology of a design is fulfilled on the basis of variables of implicative algebra of a choice of L.I. Volgin. Variables of implicative algebra of a choice are introduced as variable projections and for exposition of topology of a design. Various algorithms of a solution of problems of topological optimisation are considered. Mathematical expressions for topological optimisation on the basis of introduction of removal and material disproportionation are presented. The mode of shaping of topology of a design in the field of designing is considered. The method of automatic formation of system of the equations is developed for scaling of mechanical strains and deformations at static affectings. The variation statement of a finite element method is used. The solution of a problem of topological optimisation in the field of designing is shown. Mechanical actions are set. The is intense-deformed condition is calculated by results of a solution of differential equations of the theory of elasticity. Topological optimisation is fulfilled on energy of a strain of a material. The solution purpose consists in smoothing of distribution of energy of a strain on volume of a material and in deriving of optimum topology of a design. The offered way of a problem solving of topological optimisation allows to solve problems of optimum structural design on the set mechanical and thermal affectings.

**Keywords:** topological optimisation, information technology, numerical methods, a variation statement, a finite element method, a method of finite differences, designing area, the analysis synthesis, discrete models, a thermal field, mechanical strains

Задачи оптимизации топологии или вычисления формы конструкций актуальны ввиду целесообразности снижения материалоемкости и повышения конкурентоспособности изделий различного значения. В связи с этим проводятся теоретические и прикладные исследования в области оптимизации формы и структуры конструкций [1, 2].

Совершенствуются математические модели и методы топологической оптимизации для решения прикладных задач по обеспечению несущей способности конструкций на этапе проектирования. Рациональное ис-

пользование конструкционных материалов имеет существенное значение для многих изделий, например, авиационно-космической и автомобильной промышленности, машиностроения и др.

Эффективность методов топологической оптимизации подтверждается возможностью вычисления классических конструктивных форм, таких как арок, кронштейнов, упоров, других. Решения могут быть найдены на основе обоснования методов распределения материала в выбранной области в соответствии с конструктивными, техно-

логическими и эксплуатационными требованиями, предъявляемыми к конструкции.

В работах [3, 4] предлагается модель области допустимого распределения материала, которая определена как область проектирования. Исследование состояния конструкций проводится по результатам решения уравнений математической физики, например, уравнений Ламе теории упругости или уравнения теплопроводности Фурье на основе конечно-элементной или конечно-разностной аппроксимации.

В наиболее общей постановке оптимизация формы состоит в определении наличия или отсутствия материала в каждой точке области проектирования. Для неоднородных конструкций характеристики материала являются функциями координат.

При дискретизации области проектирования с применением метода конечных элементов или метода конечных разностей, в отличие от традиционного подхода, предполагается, что каждый элемент объема может быть как «пустым», так и «заполненным материалом». Топология конструкции формируется «заполненными элементами объема области проектирования».

Такая постановка приводит к дискретной оптимизационной задаче. Поэлементный анализ состояния материала позволяет организовать целенаправленный пошаговый итерационный процесс оптимизации топологии конструкции в области проектирования. Может иметь место «перераспределение» материала по элементам объема, «введение или удаление материала».

Подход к проектированию топологии на основе поэлементного анализа и перераспределения материала может рассматриваться как процесс изменения выбранной исходной топологии неоптимальной конструкции или заготовки изделия, при избыточном или недостаточном объеме используемого материала.

Координаты узлов сеточной модели при топологической оптимизации с применением метода конечных элементов могут быть фиксированными или могут являться переменными проектирования. Это приводит к целенаправленному формированию в процессе решения задачи, как топологии модели конструкции, так и топологии области проектирования.

Исследования в области топологической оптимизации и топологического синтеза конструкций, несущих механическую нагрузку, основаны на методах и положениях прикладной механики, вариационной формулировки метода конечных элементов, численных методах решения задач теории упругости.

Методы топологической оптимизации и автоматического топологического синтеза структуры не исключают творческого подхода к проектированию конструкций различных изделий. Данные для постановки и решения задач топологической оптимизации на этапе проектирования формируются по результатам прогнозирования возможных воздействий при эксплуатации изделия.

Способ построения модели конструкции показан на рис. 1. Модель строится в области проектирования  $D$  размером  $l_1 \times l_2 \times l_3$

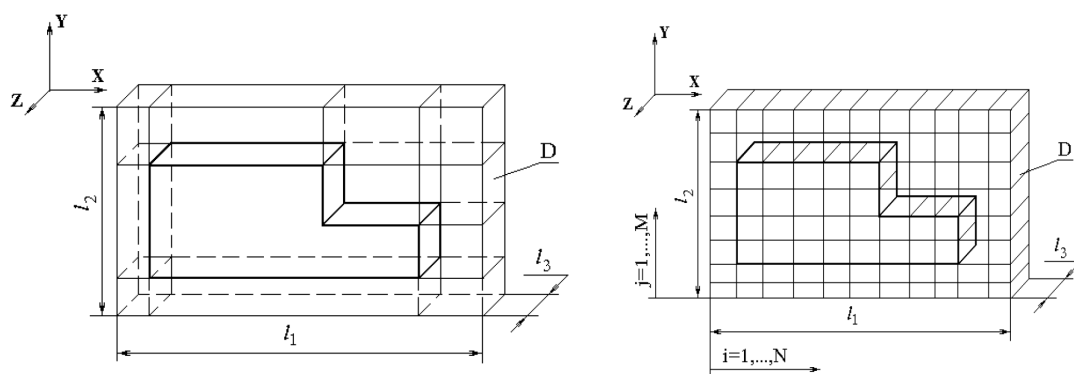


Рис. 1. Построение модели конструкции в области проектирования

В рассматриваемом случае область проектирования  $D$  разбивается на прямоугольные элементы объема. Положение каждого элемента  $E_{ij}$  размером  $h_{xi} \times h_{yj} \times h_z$  задается целочисленными координатами  $i, j$ ;  $i=1, \dots, N, j=1, \dots, M$ .

Для элемента объема  $E_{ij}$  вводится переменная  $\alpha_{ij}$ , характеризующая «наличие» или «отсутствие» материала. При решении задач топологической оптимизации переменные  $\alpha$  являются переменными проектирования. Модель конструкции представлена распределением материала по элементам объема.

В качестве переменных распределения материала  $\alpha_{ij}$  целесообразно использовать переменную импликативной алгебры выбора (ИАВ) Волгина Л.И. [5]. Для операций ИАВ допускается как логическая, так и алгебраическая форма записи. Введение переменных ИАВ для построения модели в области проектирования позволяет реализовать различные способы формирования конструкций. Способ построения геометрического описания каркаса в области проектирования основе удаления материала  $\Omega_{R2} = \Omega_S \setminus \bigcup_j \Omega_j$  показан на рис. 2.

Топологическая оптимизация конструкции при механических воздействиях осуществляется по результатам исследования напряженно-деформированного состояния и распределения нагрузки по объему ма-

териала. В зависимости от предъявляемых эксплуатационных требований, технологических ограничений оптимизация осуществляется с целью снижения массы конструкции, обеспечения необходимой жесткости или прочности при заданном объеме используемого материала, предотвращения возможного разрушения или потери работоспособности.

Нагрузка материала оценивается путем сопоставления значения некоторой физической величины, например, энергии деформации или энергии формоизменения, характеризующей состояние материала при заданных воздействиях, и предельно допустимого для материала значения.

Нагрузка материала оценивается путем сопоставления значения некоторой физической величины, характеризующей состояние материала при заданных воздействиях, и предельно допустимого для материала значения. В зависимости от характеристик материала используется оценка состояния по энергии деформации, энергии формоизменения, максимальным нормальным или касательным напряжениям.

В общем случае при заданных внешних воздействиях нагрузка по объему материала распределена неравномерно. При этом преобразование формы выполняется с целью выравнивания ее распределения по объему материала.

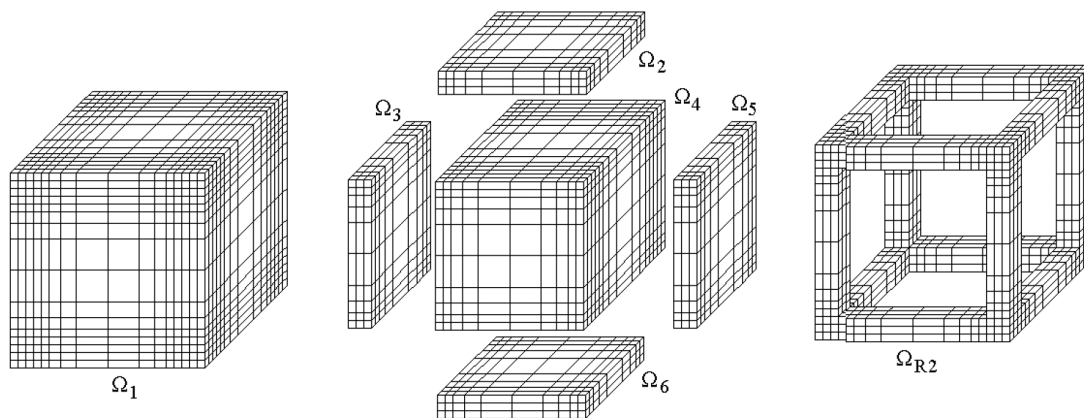


Рис. 2. Формирование геометрического представления конструкции в области проектирования на основе удаления материала

При представлении формы конструкции в виде взаимосвязанных «пустых» и «заполненных материалом» элементов объема, ее топологическая оптимизация может быть проведена на основе различных алгоритмов. Может иметь место многократное целенаправленное «введение материала» в «пустые» элементы объема, «удаление материала» из «заполненных» или «перераспределение» материала по элементам объема. В первом случае преобразование приводит к увеличению массы конструкции, во втором – к ее уменьшению. При перераспределении материала масса конструкции не изменяется.

Пусть выбрана прямоугольная область проектирования со сторонами  $l_1, l_2$

$$G = (0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2), \quad (1)$$

и прямоугольными элементами объема, размеры которых  $h_{xi}, h_{yj}, h_z$  определяются сеткой  $\omega_h$  и толщиной пластины  $h_z$ . В этом случае

$$l_1 = \sum_{i=1}^N h_{xi}; \quad l_2 = \sum_{j=1}^M h_{yj}. \quad (2)$$

В области проектирования имеем  $D = \{d_1, \dots, d_{N_e}\}$ ,  $N_e = N \times M$  элементов объема. Если  $P = \{p_1, \dots, p_{N_e}\}$  – признаки наличия материала и  $p_e \in \{0, 1\}$ , можно выделить подмножества  $R$  «пустых» и  $M$  «заполненных материалом» элементов объема:

$$M = \{d_e \mid p_e = 1\}; \quad (3)$$

$$R = \{d_e \mid p_e = 0\}; \quad (4)$$

$$m(M) + m(R) = NM = N_e. \quad (5)$$

Изменение формы конструкции на  $k$ -м шаге преобразования при «введении материала» соответствует перераспределению:

$$m(M_k) = m(M_{k-1}) + m(\bar{M}_{k-1}); \quad (6)$$

$$m(R_k) = m(R_{k-1}) - m(\bar{M}_{k-1}). \quad (7)$$

Здесь:  $m(M_k), m(R_k), m(M_{k-1}), m(R_{k-1})$  – количество «заполненных материалом» и «пустых» элементов объема;  $m(\bar{M}_{k-1})$  и  $m(\bar{R}_{k-1})$  – количество «пустых» элементов, «заполняемых материалом».

Аналогично, «удаление материала» соответствует соотношениям:

$$m(R_k) = m(R_{k-1}) + m(\bar{R}_{k-1}); \quad (8)$$

$$m(M_k) = m(M_{k-1}) - m(\bar{R}_{k-1}). \quad (9)$$

При перераспределении материала на шаге преобразования  $k-1$  материал «вводится» в  $m(\bar{M}_{k-1})$  элементов объема и из  $m(\bar{R}_{k-1})$  элементов «удаляется».

По объемам «вводимого»  $m(\bar{M}_{k-1})$  и «удаляемого»  $m(\bar{R}_{k-1})$  материала могут быть выбраны различные алгоритмы топологической оптимизации конструкций.

Вектор переменных ИАВ

$$\mathbf{P} = [p_1, \dots, p_N]^T$$

определяет «распределение» материала по элементам объема области проектирования. Тогда на  $k$ -м шаге преобразования формы конструкции возможно введение или удаление материала, что соответствует преобразованию вектора переменных ИАВ

$$\mathbf{P}^k = \mathbf{Q}^k \mathbf{P}^{k-1}. \quad (10)$$

Здесь  $\mathbf{Q}^k$  – матрица преобразования.

Для задач исследования температурных полей, напряженно-деформированного состояния, функционал, определяющий решение, может быть записан в виде [6]:

$$\chi = F(A) = \frac{1}{2} \iint_{D_r} \left[ \left( \frac{dA}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dA}{dy} \right)^2 \right] dx dy - \iint_{D_r} f(A) dx dy. \quad (11)$$

Здесь область интегрирования  $D_r$  есть область решения в области проектирования. При формировании области интегрирования просматриваются все элементы области проектирования, но выделяются только относящиеся к области решения, что позволяет получить соотношение

$$\chi = \frac{1}{2} A^T M A - F^T A. \quad (12)$$

Минимизация функционала достигается при значениях  $A_p$ ,  $i = 1, \dots, NN$ ,  $i \neq ip$ , являющихся решением линейной системы  $MA = F^T$ . Получены соотношения, позволяющие автоматически формировать матрицу жесткости конструкции по матрицам жесткости элементов, «заполненных» материалом.

На рис. 3 показано решение задачи топологической оптимизации [7]. Заданы исходная форма нагруженной конструкции и силовое воздействие. Выделен объем ненагруженного материала. Вычисление формы элемента несущей конструкции основано на целенаправленном пошаговом формировании границ области решения краевой задачи. Многократно вычисляется и исследуется напряженно-деформированное состояние и энергия деформации материала конструкции.

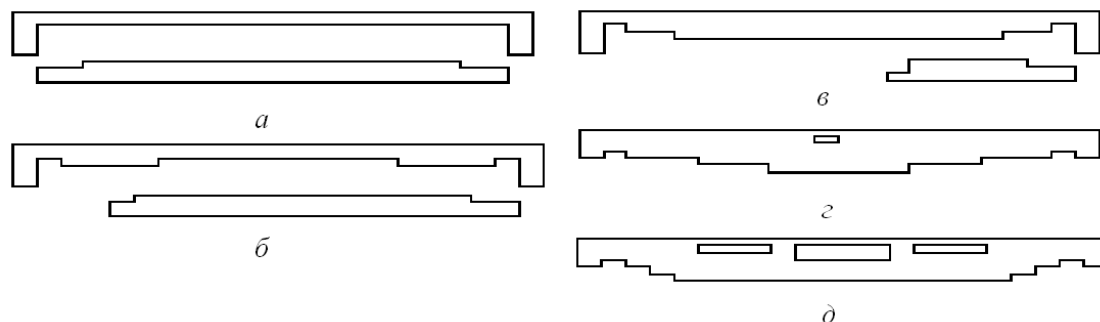


Рис. 3. Топологическая оптимизация конструкции при заданном нагружении и выделенном допустимом для перераспределения объеме материала: а – исходная форма конструкции, несущая равномерно распределенную нагрузку; б, в – перераспределение выделенного объема; г, д – результаты топологической оптимизации конструкции

Построение и применение логико-математических моделей на основе ИАВ и уравнений в частных производных открывает направления теоретических исследований и практической деятельности по созданию конкурентных деятиграммных средств автоматического проектирования наукоемких изделий. Предлагаемый подход к моделированию позволяет расширить классы решаемых задач оптимального проектирования конструкций по заданным статическим и динамическим воздействиям.

#### Список литературы

1. Bendsoe, Martin P.: Topology optimization: theory, methods and applications / M.P. Bendsoe; O. Sigmund. – Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer, 2004 (Engineering online library). – 370 p.
2. Курносов, В. Е. Логико-математические модели в задачах проектирования электронной аппаратуры и приборов: Монография / В.Е. Курносов, В.И. Волчихин, В.Г. Покровский. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. технол. ун-та, 2016. – 148 с.

3. Курносов В.Е. Эволюция формы – не имеющий аналогов метод синтеза конструкций / В.Е. Курносов. – Технический прогресс в атомной промышленности. Серия: Организация производства и прогрессивная технология в приборостроении. – Вып. 7 – 8. – М.: 1990. – С. 51.

4. Курносов В.Е. Теория и методы оптимального проектирования устройств радиотехники и связи на основе эволюционных дискретных моделей: Автореф. дис. докт. техн. наук / В.Е. Курносов. – Пенза: ПГУ, 1999. – 48 с.

5. Волгин Л.И. Импликативная алгебра выбора как основа информационных технологий и систем управления в континуальной области / Л.И. Волгин, А.Б. Климовский, А.И. Зарукин // Чебышевский сборник. Т.IV. Вып. 1(5): Труды V Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2003. – С. 61–65.

6. Сабоннадьер Ж.К. Метод конечных элементов и САПР / Ж.К. Сабоннадьер, Ж.Л. Кулон; пер. с франц. – М.: Мир, 1989. – 190 с.

7. Курносов В.Е. Метод конечных элементов в эволюционном моделировании формы конструкций РЭС / В.Е. Курносов // Актуальные проблемы анализа и обеспечения надежности и качества приборов, устройств и систем: Сб. докладов международной конференции. – Часть 1. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1996. – С. 125–126.