

УДК 681.5.01:658.512.2.011.56

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПЛАСТИНЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ В ШИРОКОМ ЧАСТОТНОМ ДИАПАЗОНЕ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ

Медведев С.Ю., Козинев Е.И., Курносое В.Е.

*Пензенский государственный технологический университет, Пенза,
e-mail: vladimirkurnosov@rambler.ru*

Предложена дискретно-непрерывная модель, создан программный комплекс для исследования динамических характеристик узлов на печатных платах электронной аппаратуры и приборов. Математическая модель отличается дискретным представлением собственных форм и аналитическим представлением функции времени. Разработан способ описания конструкции и способ задания внешних механических воздействий. Приведены результаты решения задач вычисления собственных форм и частот колебаний методом итераций. Допускаются различные способы закрепления узла на печатной плате. Вычисляются функции прогиба, ускорения, механические напряжения. Для решения дифференциального уравнения используется метод конечных разностей. Получены конечно-разностные выражения для дифференциального оператора. Собственные формы имеют дискретное представление. Функция времени представлена в аналитической форме. Система уравнений формируется по исходным данным и по графическому представлению конструкции. Выполняется оценка сходимости решения при вычислении собственных форм и частот. Имеется возможность визуализации колебаний печатной платы при ударных и вибрационных воздействиях. На заключительном этапе выполняется развертка во времени функций, характеризующих реакцию печатного узла на заданные воздействия. Разработанная модель исследования динамики пластинчатых конструкций, позволяет учитывать установленное количество собственных форм и частот. Это дает возможность исследовать реакцию узлов на печатных платах в заданном частотном диапазоне.

Ключевые слова: формы колебаний, собственные частоты, обеспечение виброустойчивости, дискретно-непрерывное моделирование, пластинчатые конструкции, узлы на печатных платах

THE PROGRAMMING COMPLEX FOR RESEARCHING PLATE CONSTRUCTIONS OF THE ELECTRONIC EQUIPMENT DYNAMICS IN THE WIDE FREQUENCY RANGE BASED ON DISCRETE AND CONTINUOUS MODEL

Medvedev S.U., Kozinov E.I., Kurmosov V.E.

Penza State Technological University, Penza, e-mail: vladimirkurnosov@rambler.ru

The is discrete-continuous model is offered, the program complex for research of dynamic characteristics of knots on printed-circuit boards of electronic equipment and devices is created. The mathematical model differs discrete representation of own forms and analytical representation of function of a time. The mode of exposition of a design and mode of the representation of exterior mechanical actions is developed. Results of a problem solving of scaling of own forms and frequencies of oscillations are resulted by a method of iterations. Various ways of attaching of knot on the printed-circuit board are admitted. Functions of a deflection, acceleration, mechanical strains are calculated. For a differential equation solution the method of finite differences is used. Finite difference expressions for a differential operator are received. Own forms have the discrete idea. Time function is presented in the analytical form. The set of equations is formed on input datas and on graphic representation of a design. The estimation of convergence of a solution is fulfilled at an evaluation of characteristic forms and frequencies. There is a possibility of visualisation of oscillations of the printed-circuit board at shock and vibrational actions. At the final stage development in time of the functions characterising a response of a printing knot on set actions is fulfilled. The developed model of research of dynamics of lamellar designs, allows to consider the installed quantity of own forms and frequencies. It gives the chance to investigate a response of knots on printed-circuit boards in the set frequency range.

Keywords: forms of fluctuations, own frequencies, ensuring vibro stability, discrete and continuous modeling, plate constructions, junctions in printed-circuit boards

Совершенствование математических моделей, расширение возможностей математического моделирования позволяет принимать обоснованные решения на этапе проектирования. К наиболее сложной проблеме проектирования относится проблема обеспечения надежности конструкций при механических воздействиях. Для обеспечения возможности исследования динамики узлов на печатных платах на основе моделирования необходимо решение следующих задач:

– построение математической модели, позволяющей получить адекватное решение;

– разработка способа описания конструкции и задания внешних воздействий для обеспечения возможности исследования реакции конструкции на заданные воздействия по результатам моделирования, их использование для обоснования проектных решений;

– интерпретация и обработка результатов решений, представленных результатами

исследования колебаний. Процесс характеризуется значениями функций координат и времени: прогиба, ускорения, механических напряжений и других.

Предлагается дискретно-непрерывная математическая модель, позволяющая исследовать колебания узла на печатной плате в широком частотном диапазоне.

Печатный узел рассматривается как изотропная пластина постоянной толщины с неоднородным распределением плотности материала, что позволяет учесть массу установленных элементов, существенно влияющих на резонансные частоты, амплитуду колебаний и механические напряжения в элементах конструкции.

Прогиб W срединной поверхности пластины при статической распределенной нагрузке q дает решение уравнения [1]:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

где $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая

жесткость пластины; E – модуль Юнга; δ – толщина пластины; ν – коэффициент Пуассона.

Функция перемещения креплений пластины $W_0(t)$ задана. Тогда выражение для инерционных сил

$$q = -\rho\delta \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Плотность материала есть функция координат $\rho(x, y)$, что позволяет учесть массу навесных элементов. С учетом потерь энергии на внутреннее трение уравнение (1) принимает вид:

$$L(W) + \beta \frac{\partial(L(W))}{\partial t} = -\frac{\delta}{D} \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Здесь $L(W) = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}$ – дифференциальный оператор; β – коэффициент вязкости материала платы.

На основе выражения (3) рассмотрим построение модели печатного узла [2, 3]. С учетом прогиба $\tilde{W} = W - W_0$ относительно закрепленных областей платы получим:

$$L(\tilde{W}) + \beta \frac{\partial(L(\tilde{W}))}{\partial t} = -\rho \frac{\delta}{D} \left(\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial t^2} + \dot{W}_0 \right) \quad (4)$$

Для получения решения уравнение (4) необходимо дополнить начальными и граничными условиями. Граничные условия

зависят от способа закрепления печатного узла:

– для жестко заземленных областей пластины:

$$W = W_0(t); \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

– для шарнирного крепления:

$$W = W_0(t); \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0. \quad (6)$$

– для незакрепленных областей, по внешнему контуру пластины:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (7)$$

Начальные условия зададим в виде:

$$\tilde{W} = 0, \quad \dot{\tilde{W}} = \text{const} \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (8)$$

Для дискретно-непрерывной модели выражение для прогиба W имеет вид:

$$\tilde{W} = \sum_{i=1}^{\infty} W^{(i)}(x, y) \cdot a^{(i)}(t). \quad (9)$$

Здесь $W^{(i)}(x, y)$ – собственные формы колебаний:

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} W^{(n)} \cdot W^{(m)} dx dy = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m. \quad (10)$$

После подстановки выражения для прогиба (9) в уравнение (4), с учетом ортогональности собственных форм колебаний, получим:

$$\begin{aligned} & \left(a^{(k)} + \beta \dot{a}^{(k)} \right) \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} L(W^{(k)}) W^{(k)} dx dy = \\ & = -\frac{\delta}{D} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho \left((W^{(k)})^2 \ddot{a}^{(k)} + \dot{W}^{(k)} \right) dx dy. \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь L_x, L_y – размеры узла на печатной плате. В случае, когда собственная форма $W^{(k)}(x, y)$ определена, воздействие $W_0(t)$ задано, функцию времени $a^{(k)}(t)$ дает решение дифференциального уравнения второго порядка (11), которое целесообразно для наглядности записать в виде

$$\ddot{a}^{(k)} + \beta(\omega_0^{(k)})^2 \dot{a}^{(k)} + (\omega_0^{(k)})^2 a^{(k)} = A^{(k)} \dot{W}_0. \quad (12)$$

Здесь:

– собственная частота

$$(\omega_0^{(k)})^2 = \frac{D}{\delta} \cdot \frac{\int_0^{L_X} \int_0^{L_Y} L(W^{(k)}) W^{(k)} dx dy}{\int_0^{L_X} \int_0^{L_Y} \rho \cdot (W^{(k)})^2 dx dy}; \quad (13)$$

$$\dot{a}^{(k)}(0) = \dot{\tilde{W}}(0) \frac{\int_0^{L_X} \int_0^{L_Y} W^{(k)} dx dy}{\int_0^{L_X} \int_0^{L_Y} (W^{(k)})^2 dx dy}; \quad (15)$$

– масштабный коэффициент

$$A^{(k)} = \frac{\int_0^{L_X} \int_0^{L_Y} \rho W^{(k)} dx dy}{\int_0^{L_X} \int_0^{L_Y} \rho \cdot (W^{(k)})^2 dx dy} \quad (14)$$

Для получения однозначного решения уравнения (12) необходимы начальные условия, которые в соответствии с выражениями (8) принимают вид (15)

$$a^{(k)}(0) = 0;$$

Нахождение функций времени $a^{(k)}(t)$ позволяет, используя выражение для прогиба $\tilde{W}(x, y, t)$, получить решение в виде пространственно-временного процесса колебаний при выбранном временном масштабе.

Для заданного воздействия $\ddot{W}_0(t)$ на области крепления узла на печатной плате можно аппроксимировать функцию $\ddot{W}_0(t)$ значениями отсчетов через интервалы времени Δt_i [4, 5]. При аппроксимации функции с требуемой точностью ε уравнение (12) для интервала $\Delta t_i = t_2 - t_1$ будет иметь вид:

$$\ddot{a}^{(k)} + \beta(\omega_0^{(k)})^2 \dot{a}^{(k)} + (\omega_0^{(k)})^2 a^{(k)} = A^{(k)} \xi^{(i)} \quad (16)$$

Здесь

$$\xi^{(i)} = \ddot{W}_0(t_1) + \varepsilon = \ddot{W}_0(t_2) - \varepsilon.$$

В общем виде для каждого интервала Δt_i решение уравнения (16) может иметь вид

$$a(t) = C_0 + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \quad \text{при} \quad \frac{\beta\omega}{2} > 1; \quad (17)$$

$$a(t) = C_0 + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \cdot t \quad \text{при} \quad \frac{\beta\omega}{2} = 1; \quad (18)$$

$$a(t) = C_0 + e^{p_1 t} (C_1 \cos p_2 t + C_2 \sin p_2 t) \quad \text{при} \quad \frac{\beta\omega}{2} < 1. \quad (19)$$

Здесь $C_0 = \frac{A\xi^{(i)}}{\omega^2}$.

Для процесса затухающих колебаний при $\beta\omega/2 < 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = -\beta \frac{\omega^2}{2}; \quad p_2 = \omega \sqrt{1 - \left(\frac{\beta\omega}{2}\right)^2}; \\ C_1 = a(0) - C_0; \quad C_2 = \frac{\dot{a}(0) - p_1(a(0) - C_0)}{p_2}; \end{array} \right. \quad (20)$$

При переходе к следующему интервалу необходимо изменение начальных условий и формирование нового временного интервала для решения задачи определения функции прогиба

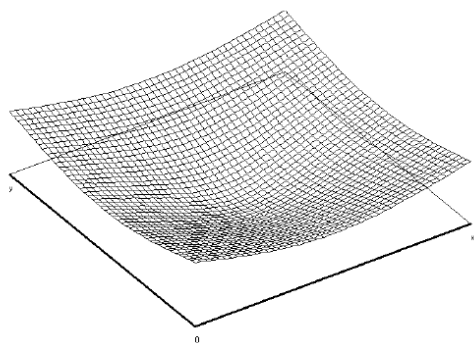
$\tilde{W}(x, y, t)$. Уравнения (17) (18) (19) соответствуют затухающему процессу колебаний.

Решение задачи осуществляется на основе метода конечных разностей. Алгоритм моделирования колебаний сводится к формированию конечно-разностного аналога уравнения (4), решению с учетом граничных условий, обусловленных способом закрепления, видом функции плотности $\rho(x, y)$ в соответствии с массой навесных элементов и массой материала платы печатного узла.

Задается начальное приближение собственной формы колебаний $W^{(k)}$, например, $W^{(k)} = 0$ для закрепленных областей и $W^{(k)} = 1$ в свободной от закрепления области. Вычисляется частотный параметр $\lambda^{(k)}$:

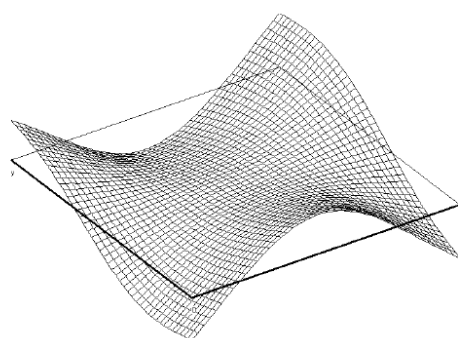
$$\lambda^{(k)} = \frac{D \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} L(W^{(k)}) W^{(k)} dx dy}{\delta \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho (W^{(k)})^2 dx dy} \approx \frac{D \sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} k_x k_y L(W_{xy}^{(k)}) W_{xy}^{(k)}}{\delta \sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} k_x k_y \rho_{xy} (W_{xy}^{(k)})^2} dx dy. \quad (21)$$

a



б

б



в

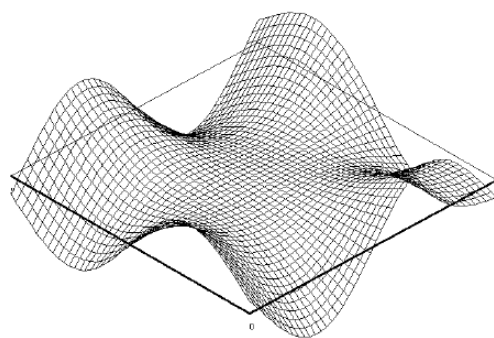
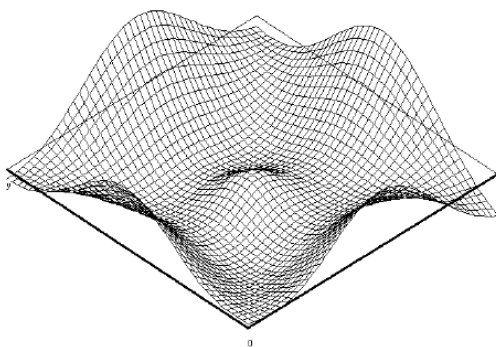


Рис. 1. Собственные формы колебаний закрепленной в центре прямоугольной пластины: первая (а), шестая (б), десятая (в), тринадцатая (г)

Здесь k_x, k_y – интегральные коэффициенты; N_x, N_y – количество узлов сеточной модели по направлениям осей координат.

Уточняются значения дискретного представления собственной формы $W^{(k)}(x, y)$, в соответствии со свободными узлами сеточной модели и значение частотного параметра $\lambda^{(k)}$. На заключительном этапе выполняется развертка во времени функций, характеризующих реакцию печатного узла на заданные воздействия.

Результаты определения собственных форм и частоты для пластины прямоугольной формы закрепленной в центре с однородным распределением массы показаны на рис. 1 [6]. Форма колебаний соответствует прогибу на 1-й, 6-й, 10-й и 13-й собственных частотах.

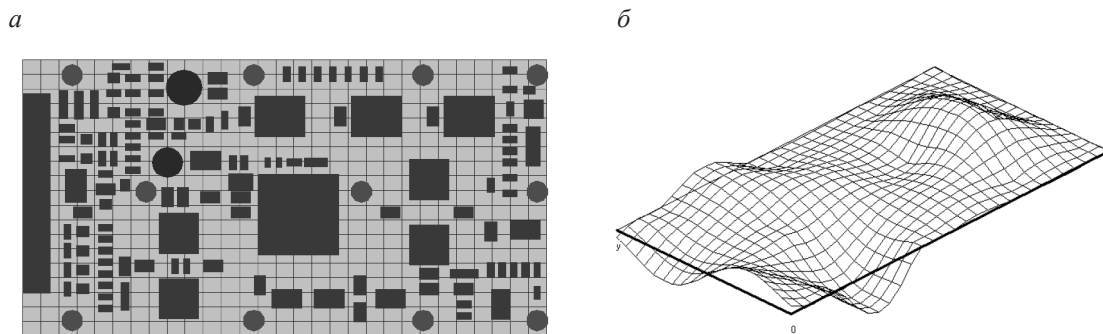


Рис. 2. а – графическое представление модели узла на печатной плате в программном комплексе моделирования динамики пластинчатых конструкций; б – прогиб узла на печатной плате при ударном воздействии

На рис. 2 показана модель узла на печатной плате и график прогиба при ударном воздействии. Узел имеет одиннадцать точек крепления. Показан прогиб платы с учетом первых семи форм колебаний в диапазоне частот от 100 до 2000 Гц.

При моделировании динамики узлов на печатных платах электронной аппаратуры необходимо исследовать колебания в широком частотном диапазоне. Это позволит выявить в конструкции локальные области механических напряжений и наиболее интенсивных виброперегрузок при эксплуатационных воздействиях.

Обоснованные конструктивные решения по повышению устойчивости изделий к механическим воздействиям могут быть приняты по результатам оценки динамических характеристик на этапе проектирования узлов электронной аппаратуры и приборов.

Список литературы

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.

2. Курносов В.Е. Информационное обеспечение проектирования узлов на печатных платах на основе дискретно-непрерывного моделирования / Т.В. Андреева // Обработка информации: методы и системы: Сборник научных статей. – М.: Горячая линия – Телеком, 2003. – С. 130 – 137.

3. Курносов В.Е. Программный комплекс исследования динамики пластинчатых конструкций электронной аппаратуры в широком частотном диапазоне на основе дискретно-непрерывной модели / Т.В. Андреева, В.Е. Курносов // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс: Периодическое научное издание. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. технол. ун-та, 2013. – № 10(14). – С 215 – 221.

4. Говоренко Г.С. Теоретические аспекты построения информационной технологии моделирования вибраций конструкций РЭА для оценки ее надежности/ Г.С. Говоренко, В.Е. Курносов, В.А. Ушаков, К.Ю. Парфенов // Надежность и качество 2002: Сб. докладов международного симпозиума. – Пенза: Изд-во Пенз гос ун-та, 2002. – С. 47-52.

5. Говоренко Г.С. Система моделирования динамики конструкций электронной аппаратуры / Г.С. Говоренко, В.Е. Курносов, В.А. Ушаков, К.Ю. Парфенов // Надежность и качество 2002: Сб. докладов международного симпозиума. – Пенза: Изд-во Пенз гос ун-та, 2002. – С. 53-58.

6. Курносов В.Е. Логико-математические модели в задачах проектирования электронной аппаратуры и приборов: Монография / В.Е. Курносов, В.И. Волчихин, В.Г. Покровский. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. технол. ун-та, 2016. – 148 с.