

УДК 378.14:372.8

О ПРЕПОДАВАНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ»

Сафронова Т.И., Карманова А.В., Сергеева И.О.*Кубанский государственный аграрный университет имени И.Т. Трубилина, Краснодар,
e-mail: saf55555@yandex.ru*

В статье приведены примеры, рассматриваемые на лекциях и практических занятиях с магистрантами, обучающимися по направлению 20.04.02 «Природообустройство и водопользование» при изучении дисциплины «Математическое моделирование процессов в компонентах природы». Применение математического моделирования дает возможность изучать природные процессы с помощью моделей, рассматривать задачи принятия решений в условиях неопределенности, оценивать последствия принимаемых решений. В первом примере рассматривается популярный статистический критерий Стьюдента. Во втором примере для характеристики температурного режима территории изложено правило вычисления основных статистических характеристик рядов метеопараметров. Пространственно-временную изменчивость предлагается исследовать с помощью аппарата разложения полей по естественным ортогональным составляющим. Оценка значимости выявленных отличий осуществляется с помощью критерия Стьюдента. В третьем примере рассматриваются характеристики зависимости случайных величин друг от друга, условные математические ожидания (условные средние). Кривые регрессии показывают истинную зависимость, «очищенную» от всех случайных факторов. Рассмотренные примеры помогают решить проблему мотивации углубленного изучения математики и формировать у студентов систематические и прочные знания.

Ключевые слова: случайные величины, статистический критерий, кривые регрессии

THE TEACHING OF THE DISCIPLINE «MATHEMATICAL MODELING OF NATURAL PROCESSES»

Safronova T.I., Karmanova A.V., Sergeyeva I.O.*Kuban State Agrarian University named after I.T. Trubilin, Krasnodar,
e-mail: saf55555@yandex.ru*

The article presents examples considered in lectures and workshops with undergraduates studying in the direction 20.04.02 “environmental engineering and water use” in the study of the discipline “Mathematical modeling in the components of nature.” The use of mathematical modeling makes it possible to study natural processes with the help of models, to consider decision-making problems in conditions of uncertainty, to assess the consequences of decisions. In the first example we consider the popular statistical criterion of student. In the second example for the characteristic of temperature regime of the territory the rule of calculation of the basic statistical characteristics of series of meteoroparameters is stated. Spatial and temporal variability are invited to explore using the apparatus of the decomposition of fields by natural orthogonal components. Assessment of the significance of the revealed differences is carried out using student’s criterion. In the third example the characteristics of dependence of random variables from each other, conditional mathematical expectations (conditional averages) are considered. Regression curves show true dependence, “purified” from all random factors. The considered examples help to solve the problem of motivation in-depth study of mathematics and to form students’ systematic and strong knowledge.

Keywords: random variable, statistical test, regression curves

В настоящее время высшее образование должно способствовать формированию специалистов широкого профиля, сочетающему глубокие фундаментальные знания и обстоятельную практическую подготовку конкретной отрасли производства. В КубГАУ работа над курсом «Математическое моделирование процессов в компонентах природы» продолжается. Новизна исследований заключается в составлении примеров прикладного характера, которые усиливают взаимосвязь математики и смежных дисциплин, формируют у студентов умение строить математические моде-

ли, обеспечивают профессиональную направленность обучения [1].

Цель исследования – разработать программу дисциплины «Математическое моделирование процессов в компонентах природы» с примерами из данной специальности.

Результаты исследования и их обсуждение

Приведем несколько примеров прикладного характера, которые показывают применение теории вероятностей.

Первый пример. Рассматриваем популярные статистические критерии.

Критерий Стьюдента. Проблема ставится следующим образом. Пусть имеются две случайные величины ζ и η . Обе они являются нормальными случайными величинами, дисперсия их также одинакова, то есть $D\{\zeta\} = D\{\eta\} = \sigma^2$. А математические ожидания $M\{\zeta\} = a_1$ и $M\{\eta\} = a_2$ могут быть разными. Необходимо проверить гипотезу $H_0: a_1 = a_2$ при альтернативе $H_1: a_1 \neq a_2$.

Пусть в n_1 опытах измеряли величину ζ , получили значения $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_1}$; в n_2 опытах измеряли величину η и получили значения $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n_2}$.

Оценки величин a_1 и a_2 имеют вид

$$\hat{a}_1 = m_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i, \quad \hat{a}_2 = m_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} y_i.$$

Рассмотрим их разность $m_1 - m_2$. Пусть верна гипотеза H_0 . Что тогда можно сказать об этой разности?

Так как при $H_0 a_1 = a_2$, то

$$M\{m_1 - m_2\} = M\{m_1\} - M\{m_2\} = 0.$$

Далее, так как

$$D\{m_1\} = \frac{\sigma^2}{n_1}, \quad D\{m_2\} = \frac{\sigma^2}{n_2}, \quad \text{то}$$

$$D\{m_1 - m_2\} = D\{m_1\} + D\{m_2\} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right).$$

Поэтому дробь

$$\frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \sigma^2}}$$

является стандартной нормальной случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Но величина σ^2 неизвестна, её надо заменить оценкой. Какая же она?

Оценка величины σ^2 по первой выборке есть

$$\hat{\sigma}^2 = s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - m_1)^2,$$

а по второй выборке –

$$\hat{\sigma}^2 = s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - m_2)^2.$$

Из этих двух величин надо скомбинировать одну общую оценку величины σ^2 .

Стьюдент предложил брать её в виде

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

так как в s_1^2 есть сомножитель $1/(n_1 - 1)$, а в s_2^2 – сомножитель $1/(n_2 - 1)$.

Заменяя в выражении для σ^2 её оценкой s^2 , получим величину

$$t = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}}.$$

Можно доказать, что при верности гипотезы H_0 величина t имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2$.

Далее представим α_0 в виде

$$\alpha_0 = \alpha_0/2 + \alpha_0/2$$

и найдём $t_{\alpha_0/2}$, соответствующее числу степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2$. Если верна гипотеза H_0 , то событие, заключающееся в выполнении неравенства $|t| < t_{\alpha_0/2}$ будет иметь вероятность $1 - \alpha_0$, а событие $|t| \geq t_{\alpha_0/2}$ будет наступать с вероятностью α_0 , то есть будет событием практически невозможным. Поэтому решающее правило имеет вид: если выполнится условие $|t| < t_{\alpha_0/2}$, то надо принять гипотезу H_0 ; если же окажется, что $|t| \geq t_{\alpha_0/2}$, то гипотеза H_0 должна быть отвергнута.

Использование критерия Стьюдента описано во втором примере.

Основным недостатком критерия Стьюдента является то, что он «привязан» к нормальному распределению. Поэтому в настоящее время большое распространение получили так называемые непараметрические критерии, которые «свободны» от вида функции распределения выборочных значений, то есть их можно применять для любых функций распределения.

Большинство таких критериев основано на том, что измеренные значения заменяются их рангами.

Пусть имеется выборка из пяти значений, которые равны 7,7; 6,8; 8,3; 7,5; 8,9. Расположим их в порядке *возрастания* и пронумеруем в этом порядке

6,8	7,5	7,7	8,3	8,9
1	2	3	4	5

Эти порядковые номера и называют рангами соответствующих выборочных значений.

А что делать, если некоторые выборочные значения совпадают между собой? Вообще-то говоря, для непрерывных случайных величин такое совпадение имеет вероятность 0, но оно может иметь место из-за ограниченной точности измерений и округления полученных результатов.

В этом случае совпадающим выборочным значениям в качестве их рангов присваивается среднее арифметическое их рангов. Например, если выборочные значения равны 7,5; 6,8; 8,3; 7,5; 8,9, то их ранги будут такими:

$$\begin{array}{cccccc} 6,8 & 7,5 & 7,5 & 8,3 & 8,9 \\ 1 & 2,5 & 2,5 & 4 & 5 \end{array}$$

Рассмотрим критерий Вилкоксона. Пусть имеются выборки случайных величин ζ и η :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m \text{ и } y_1, y_2, y_3, \dots, y_n.$$

Критерий Вилкоксона проверяет гипотезу об однородности выборок, то есть гипотезу следующего вида: $H_0: \forall x F_{\zeta}(x) = F_{\eta}(x)$ при альтернативе $H_1: \exists x F_{\zeta}(x) \neq F_{\eta}(x)$. Для её проверки составим из величин $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ и $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ один общий вариационный ряд, то есть расположим их в порядке возрастания их значений. В результате получим последовательность типа

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} x & x & y & x & x & x & y & y & y & y & \dots & x & & y & & y \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots & N-2 & N-1 & N, \end{array}$$

где $N = m + n$. Заметим, что сами выборочные значения выписывать не надо, надо лишь писать буквы x и y в зависимости от того, к какой выборке они принадлежат.

В критерии Вилкоксона в качестве статистики для проверки гипотезы используется сумма рангов той выборки, объём которой меньше. Пусть, например, $m < n$ и $r_1, r_2, r_3, \dots, r_m$ есть ранги, соответствующие значениям x . Тогда статистика критерия Вилкоксона задаётся формулой

$$W = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_m.$$

Само решающее правило имеет вид если выполнено условие

$$W_1 \leq W \leq W_2,$$

то гипотеза H_0 принимается, в противном же случае она отвергается.

Величины W_1 и W_2 находятся из специальных таблиц в соответствии с объёмами выборок m и n и уровнем значимости α_0 . В таблицах обычно приводится лишь величина W_1 , а величину W_2 считают по формуле

$$W_2 = m(m + n + 1) - W_1.$$

Рассматриваем ещё один популярный статистический критерий — так называемый критерий серий. Его обычно применяют при выравнивании экспериментальных данных к некоторым кривым по методу наименьших квадратов.

Пусть данные измерений имеют вид $y_i = f(x_i, \theta) + n_i$ и, выравнивая данные к зависимости $y = f(x, \theta)$, получили выровненные значения $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \dots, \hat{y}_N$. Будем сравнивать их с экспериментальными данными $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$ и, если $y_i > \hat{y}_i$, то приписывать этой паре знак $+$, если же $y_i < \hat{y}_i$, то знак минус. В результате получим последовательность знаков $+$ и $-$ вида

$$+ + - + + + - - - - \dots + - - ,$$

состоящую из m элементов $+$ и n элементов $-$.

Проверяется гипотеза о том, что эти элементы расположены случайно. Если эта гипотеза будет принята, то говорят, что опытные данные не противоречат выровненным значениям; в противном случае считают, что опытные данные противоречат выровненным значениям и необходимо выравнивать их к какой-то другой кривой.

Сам критерий выглядит следующим образом. Назовём сериями части нашей последовательности, каждая из которых состоит из знаков одного вида.

Пусть γ есть общее количество серий в нашей последовательности. Тогда по таблицам критерия серий при заданном уровне значимости α_0 найдём величины γ_1 и γ_2 , и если окажется, что $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$, то принимается гипотеза о том, что выровненные значения не противоречат экспериментальным данным. Если же окажется, что $\gamma \leq \gamma_1$ или $\gamma \geq \gamma_2$, то считается, что выровненные значения противоречат эксперимен-

тальным данным и надо их выравнять к какой-то другой кривой.

Обычно действуют по следующей схеме. Сначала данные выравняют к прямой линии, то есть к полиному порядка 1. Затем, используя критерий серий, проверяют, противоречат выровненные значения экспериментальным данным или нет. Если не противоречат – то на этом всё заканчивается. Если же противоречат – то выравняют данные к полиному второго порядка, снова проверяют гипотезу о случайности + и –, и в случае противоречия выравняют к полиному третьего порядка и т.д. Та степень полинома, при которой в первый раз критерий серий показывает, что нет противоречия между экспериментальными и выборочными значениями, и принимается в качестве результата выравнивания.

Второй пример. Для характеристики температурного режима территории вычисляем основные статистические характеристики рядов метеопараметров: абсолютные минимальную и максимальную суммы температур, интервал между абсолютными максимальной и минимальной суммами температур, коэффициенты асимметрии, эксцесса и вариации [2].

Помимо расчета обычных статистических показателей необходимо проводить углубленный анализ временных рядов с применением математического моделирования. Такой методологический подход позволяет получить дополнительную информацию, необходимую для оптимального планирования и организации сельскохозяйственного производства [3].

Пространственно-временную изменчивость исследуем с помощью аппарата разложения полей по естественным ортогональным составляющим. Система функций для разложения подбирается по специфике рассматриваемого поля. Этот математический аппарат позволяет полнее представить начальную информацию, а еще и уменьшить число предикторов.

Исследуем временную структуру суммы температур за вегетационный период в низкоурожайные и высокоурожайные годы. Оценка значимости выявленных отличий осуществляется

с помощью критерия Стьюдента. Если полученное значение критерия больше табличного на заданном уровне и числе степеней свободы, то исследуемые выборки статистически различаются между собой.

Третий пример. Рассматриваем характеристики зависимости случайных величин друг от друга. Пусть дана двумерная случайная величина (ξ, η) с плотностью вероятностей $p_{\xi\eta}(x, y)$. Ковариацией величин ξ и η называется величина

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M\{(\xi - M\{\xi\})(\eta - M\{\eta\})\}.$$

Эта характеристика называется корреляционным моментом (иначе «моментом связи») случайных величин.

Наиболее полно зависимость случайной величины ξ от η описывается условной плотностью вероятностей $p_{\xi|\eta}(x|y)$. Зависимость η от ξ – условной плотностью вероятностей $p_{\eta|\xi}(y|x)$. Однако эти плотности вероятностей сложны для экспериментального измерения, и с ними трудно работать [4].

Вместо них рассматриваем так называемые условные математические ожидания (условные средние)

$$M\{\eta | x\} = \int_{-\infty}^{\infty} y p_{\eta|\xi}(y | x) dy,$$

$$M\{\xi | y\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi|\eta}(x | y) dx.$$

В отличие от $M\{\xi\}$ и $M\{\eta\}$ это уже не числа, а функции. Кривую $M\{\eta | x\}$ как функцию от x называют кривой регрессии η от ξ , а $M\{\xi | y\}$, являющейся функцией от y , называют кривой регрессии ξ от η [5; 6].

Обычно этим кривым дают следующую наглядную, хотя и упрощенную трактовку [6]. В природе есть какая-то детерминированная зависимость, скажем $\eta = f(\xi)$. Но сама же природа на эту зависимость «накидывает» случайные факторы, так что эта зависимость как бы размывается. А кривая регрессии и есть эта истинная зависимость, «очищенная» от всех случайных факторов.

Выводы

На современном этапе происходящих преобразований в образовании математические методы становятся не-

обходимыми для всех направлений научной и практической деятельности специалиста. Потому при изложении курса «Математическое моделирование процессов в компонентах природы» мы стараемся выработать у студентов математический подход к изучению задач их специальности.

Студенты с большим интересом решают прикладные задачи. Такой подход направлен на повышение эффективности образовательного процесса и образовательного уровня подготовки студентов.

Список литературы

1. Карманова А.В., Кондратенко Л.Н., Литвиненко Г.Н. Теоретические основы отбора профессионально ориентированного содержания курса математики для студентов агробиологических направлений аграрных вузов // *Общество: социология, психология, педагогика*. – 2017. – № 8. – С. 112–116. – URL: http://dom-hors.ru/rus/files/arhiv_zhurnala/spp/2017/8/pedagogics/karmanova-kondratenko-litvinenko.pdf (дата обращения: 14.11.2017).
2. Кузнецов Е.В. Системно-информационная оценка экологического состояния рисовой оросительной системы / Е.В. Кузнецов, Т.И. Сафронова, И.А. Приходько // *Мелиорация и водное хозяйство*. – 2005. – № 3. – С. 71–78.
3. Сафронова Т.И. Оценка степени влияния контролируемого фактора: сб. статей по материалам учебно-методической конференции. – Краснодар: КубГАУ. – 2017. – С. 98–99.
4. Сафронова Т.И., Дегтярев Г.В., Дегтярева О.Г. Способ регулирования гидравлической структуры потока воды и устройство для его осуществления: патент на изобретение RU 2228998 19/08/2002.
5. Рекс Л.М., Умывакин В.М., Сафронова Т.И., Приходько И.А. Математическая модель экологической ситуации на рисовой оросительной системе // *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета*. – 2008. – № 44. – С. 191–208.
6. Соколова И.В. Метод линейного программирования при решении землеустроительных задач. Качество современных образовательных услуг – основа конкурентоспособности вуза: сб. ст. по учеб.-метод. конф. / отв. за выпуск М.В. Шаталова. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – С. 90–93.