УДК 372.851.2

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ В ПРЕПОДАВАНИИ ТЕМЫ «ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА» В ВУЗАХ С УСИЛЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРОГРАММОЙ

Черняев А.П.

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, e-mail: info@mipt.ru

Для студентов, начинающих изучать математический анализ, первая серьезная проблема – это освоение темы «Действительные числа». Успешное изучение этой темы, как показывает учебный процесс, весьма затруднительно. Для успешного освоения этой темы некоторым студентам бывает недостаточно прослушать лектора и посетить семинары по следующим причинам. Тема «Действительные числа» читается различными лекторами по-разному. По-разному она излагается и в популярных учебниках, ставших классическими. Используется аксиоматический метод, метод бесконечных десятичных дробей, метод сечений Дедекинда. Связь между этими методами слабая. В настоящем обзоре излагаются и приводятся в соответствие два метода введения действительных чисел: аксиоматический и при помощи бесконечных десятичных дробей. Упоминается также метод сечений рациональных чисел по Дедекинду и делается попытка частично привести этот метод со вторым методом. Теорема Кантора о вложенных отрезках добавляется, т. к. в некоторых изложениях она участвует в аксиоматике. Обзор, по нашему мнению должен быть интересен как студентам младших курсов, изучающим математический анализ, так и студентам старших курсов, аспирантам, а также научным работникам и преподавателям, интересующихся аксиоматикой.

Ключевые слова: парадоксы теории множеств, бесконечная десятичная дробь, предел последовательности, точная грань, арифметика, упорядоченность, непрерывность, транзитивность, счетность и несчетность множеств

METHODOLOGICAL ASPECTS IN TEACHING THE TOPIC «REAL NUMBERS» AT UNIVERSITIES IN THE ENHANCED MATH PROGRAM

Chernyaev A.P.

Moscow institute of physics and technology (state University), Dolgoprudny, e-mail: info@mipt.ru

For students starting to learn calculus, the first serious problem is the development of the theme «real numbers». Successful study of this subject, shows the learning process, is very difficult. For the successful development of this subject some students is not enough to listen to the lecturer and to attend seminars on the following reasons. Topic «real number» is read by different lecturers in different ways. Differently it is presented in popular textbooks, which became a classic. Used axiomatic method, method of infinite decimal fractions, the method of Dedekind sections. The relationship between these methods is weak. In the present review outlines and reconciled two methods of introduction of real numbers: axiomatic and using the infinite decimal fractions. Also refers to a method of sections of rational numbers by Dedekind and attempts to bring this method to the second method. Cantor's theorem on nested intervals is added, because in some writings she is involved in the axiomatics. The review, in our opinion should be interesting as the undergraduate students studying mathematical analysis and senior students, graduate students, and researchers and teachers interested in the axiomatics.

Keywords: paradoxes of set theory, infinite decimals, the limit of the sequence, the exact limit, arithmetic, orderliness, continuity, transitivity, countability and nascenti sets

Отметим сразу, что изучение действительных чисел в вузе должно достаточно сильно отличаться от изучения этой темы в школе [12]. Тема «Действительные числа» излагается» различными лекторами и авторами учебников по разному. Традиционно используются аксиоматический метод [2-5] и метод бесконечных десятичных дробей [9-11, 16-19]. Есть еще метод сечений Дедекинда [7, 8, 13]. Связь между указанными методами слабая, и настоящий обзор вместе с [14, 15] частично восполняет данный пробел.

Действительно, если множество не строится конкретно, а задается условиями, то нельзя быть уверенным в его существовании. Это показывает, например, парадокс Рассела [6], который приводится в первом пункте настоящего обзора.

В [9-11, 16-19] действительные числа определяются при помощи бесконечных десятичных дробей. Однако для обоснования свойств действительных чисел привлекаются понятия точных верхней и нижней граней [9, 10, 16] и предела последовательности [17-19]. С другой стороны, понятия точных верхней и нижней граней требуют определения действительного числа, обоснования свойств упорядоченности действительных чисел, а традиционное определение предела последовательности [2-5, 11] требует еще и обоснования арифметики действительных чисел.

Для определения точной верхней грани [16, 18, 19] должно быть определено действительное число и должны быть определены отношения порядка: больше, меньше, равно. В [16] определения точных верхней и нижней граней используются для обоснования арифметики действительных чисел.

В [17-19] вводится предел последовательности, который требует лишь определения и упорядоченности действительных чисел и для обоснования арифметики действительных чисел, чем обеспечивается меньшая, чем в [16], трудоемкость этого обоснования.

Итак, в [2-5] арифметика действительного числа содержится в его определении, а понятия точных граней и предела последовательности даются потом, в [17-19] одно из этих понятий обязательно привлекается для обоснования арифметики действительных чисел. В [15] показано, что, определив действительные числа бесконечными десятичными дробями, можно доказать аксиомы действительных чисел в качестве свойств, не привлекая понятия точных граней и предела последовательности.

В настоящем обзоре мы дадим аналогичный [15] подход изложения этой темы, но с некоторыми изменениями, связанными с удобством и компактностью.

1. Понятие множества, основные обозначения, парадокс Рассела

Множество в математике – понятие исходное, оно не определяется и означает набор или совокупность. Множество состоит из объектов, которые называются его элементами. Множества обычно обозначают большими буквами, а элементы множеств – малыми.

Основные обозначения:

$a \in A$ – элемент *a* принадлежит множеству *A*, $a \notin A$ – элемент *a* не принадлежит множеству *A*, $\forall a$ – для любого *a*, $\exists a$ – существует *a*, *a*: – *a*, такой что, $\Rightarrow$ – следует, $\Leftrightarrow$ – равносильно.

Запись $A \subset B$ означает, что множество *A* является подмножеством множества *B*, т.е. $\forall a \in A \;\; a \in B$. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то пишут $A = B$. Запись $a = b$ означает, что *a* и *b* – это один и тот же элемент, причем должны быть справедливы свойства рефлексивности: $a = a$; взаимности: $a = b \Rightarrow b = a$; транзитивности: $a = b, b = c \Rightarrow a = c$.

Объединением множеств *A* и *B*, т.е. $A \cup B$ назовем множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств *A*, *B*.

Пересечением множеств *A* и *B*, т.е. $A \cap B$, назовем множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит как множеству *A*, так и множеству *B*.

Разностью множеств *A* и *B*, т. е. $A \setminus B$, назовем множество, состоящее из всех элементов *A*, не входящих во множество *B*.

Вводится пустое множество $\varnothing$ – множество, не содержащее ни одного элемента.

Примеры множеств: $A = \{a\}$ – множество из одного элемента, $B = \{a, b\}$ – множество из двух элементов, если эти элементы различны. Однако какое-нибудь множество может содержаться в другом множестве в качестве элемента, например:

$$C = \{a, b, c, \{a, b\}\};$$

здесь также предполагается, что *a,b* и *c*– различны.

Понятие множества противоречиво. Это показывают парадоксы Бертрана Рассела, один из которых мы приведем [17].

Парадокс Рассела. Множество должно быть определено так, чтобы для любого объекта существовал однозначный ответ на вопрос, принадлежит ли выбранный объект рассматриваемому множеству.

Пусть множество *F* содержит все те и только те множества, которые не являются элементами самих себя (не содержат себя в качестве элемента):

$$F = \{M : M \notin M\}.$$

Парадокс состоит в том, что после такого способа задания множества *F* невозможно однозначно ответить на вопрос: само множество *F* как элемент принадлежит *F* или нет.

В самом деле, если предположить, что $F \in F$, то тогда *F* является элементом самого себя и не может, согласно определению, принадлежать *F*, т.е. $F \notin F$.

Если же предположить, что $F \notin F$, то это означает, что *F* не является элементом самого себя и, поэтому, *F* как элемент должен принадлежать *F*, т. е. <<cher26.wmf>>.

2. Аксиоматический метод введения действительных чисел

Непустое множество *R* называется множеством действительных (вещественных) чисел, а его элементы – действительными (вещественными) числами, если на *R* определены операции сложения и умножения и отношение порядка, удовлетворяющие следующим свойствам [2].

I. Свойства сложения:

1. $\forall a, b \in R \;\; a + b = b + a$ (коммутативность);

2. $\forall a, b, c \in R \;\; a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность);

3. $\exists\, 0 \in R : \forall a \in R \;\; a + 0 = a$;

4. $\forall a \in R\, \exists(-a)$ – число противоположное $a : a + (-a) = 0$.

Число $a + (-b) = a - b$ – называется разностью a и b. $\forall a, b \in R$.

II. Свойства умножения:

1. $\forall a, b \in R\ ab = ba$ (коммутативность);
2. $\forall a, b, c \in R\ \ a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность);
3. $\exists 1 \in R\ 1 \neq 0 : \forall a \in R\ \ a1 = a$;
4. $\forall a \in R\ a \neq 0\ \exists \dfrac{1}{a} = a^{-1}$ – число обратное $a : a\dfrac{1}{a} = 1$.

Число $a \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$ – называется частным от деления a на b. $\forall a, b \in R$ и $b \neq 0$.

III. Свойство сложения и умножения:

$\forall a, b, c \in R\ \ (a+b)c = ac + bc$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

IV. Упорядоченность и ее связь со сложением и умножением. Для любых различных a и b из R справедливо отношение $a < b$, или, что то же самое, $b > a$, либо $b < a$, или, что то же самое, $a > b$. При этом должны быть выполнены свойства:

1. если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (транзитивность);
2. если $a < b$, то $\forall c \in R\ a + c < b + c$;
3. если $a > b$ и $c > 0$ то $ac > bc$.

Множества, удовлетворяющие IV и IV 1 называются упорядоченными.

V. Непрерывность. Пусть X и Y – непустые множества R, такие что

$$\forall x \in X, \forall y \in Y\ x \leq y.$$

Тогда $\exists a \in R$, такое что

$$\forall x \in X, \forall y \in Y\ x \leq a \leq y. \qquad (2.1)$$

З а м е ч а н и е 1. Множество Q рациональных чисел удовлетворяет всем аксиомам, кроме V.

Действительно, пусть

$$X = \left\{x : x \in Q, 0 < x^2 < 2\right\},$$

$$Y = \left\{y : y \in Q, y > 0, y^2 > 2\right\}.$$

Тогда в Q не существует a со свойством (2.1).

Следствия из аксиом I – V.

1. Число 0 единственно.

Действительно, пусть существуют 0 и 0′, удовлетворяющие I 3. Тогда, в силу I 1 и I 3

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0.$$

2. Число $(-a)$ единственно.

Действительно, пусть существуют $(-a)$ и $(-a)'$, удовлетворяющие I 4. Тогда, в силу I 1, I 2 и I 3

$$(-a)' = (-a)' + 0 = (-a)' + (a + (-a)) =$$
$$= ((-a)' + a) + (-a) =$$
$$= (a + (-a)') + (-a) = 0 + (-a) =$$
$$= (-a) + 0 = (-a).$$

3. Аналогично 1 и 2 обосновывается единственность 1 и $\dfrac{1}{a}$ при $a \neq 0$.

4. $\forall a \in R\quad a0 = 0$.

Это следует из того, что в силу II 3, II 1, III справедливы равенства, означающие, что $a0$ удовлетворяет I 3:

$$a + a0 = a1 + a0 = 1a + 0a = (1+0)a =$$
$$= 1a = a1 = a.$$

5. $a, b \in R, ab = 0 \Rightarrow a = 0$, или $b = 0$.

От противного, пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$, тогда, умножив $ab = 0$ на $\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b}$ и используя II 1, II 2 и II 4, получим $1 = 0$, что противоречит II 3.

6. $0 < 1$.

От противного, пусть $0 \geq 1$, тогда из II 3 следует, что $0 > 1$, или, что то же самое, $1 < 0$. Согласно I 4 существует (-1). Пользуясь IV 2, из последнего неравенства получаем $0 < (-1)$, или, что то же самое, $(-1) > 0$. Обратимся к IV 3 при $a = 0, b = 1$ и $c = (-1)$. Это возможно в силу того, что $a = 0 > 1 = b$ и, поскольку, мы только что доказали, что $c = (-1) > 0$. В результате получаем $0 > (-1)$, что противоречит неравенству $0 < (-1)$, полученному ранее.

З а м е ч а н и е 2. Ввиду парадокса Рассела возникает вопрос: не получим ли мы во множестве R противоречивого следствия, как это произошло с множеством F предыдущего пункта. Для этого мы построим множество R с помощью бесконечных десятичных дробей.

3. Определение действительных чисел, их упорядоченность и непрерывность

В процессе счета возникают натуральные числа 1, 2, 3, …, n, …, . Множество натуральных чисел обозначим N, а множество целых – Z. Потребности практики приводят к необходимости введения рациональных чисел, т.е. чисел вида $\dfrac{m}{n}$, где m – целое, а n – натуральное число. Множество рациональных чисел обозначим Q. Однако, как показывает теория измерений, этого недостаточно, возникает потребность дальнейшего расширения понятия числа.

Всюду в дальнейшем предполагаются известными свойства рациональных чисел [18] (более точно, предполагаются известными свойства конечных десятичных дробей).

Бесконечными десятичными дробями называются символы вида $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$ и $-\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$, где α_0 – любое целое неотрицательное число, а каждое α_i, $i=1,2,...$ – одна из цифр $0,1,2,...,9$.

Определение 1. Действительным числом называется любая бесконечная десятичная дробь.

Если $a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha_{n+1}...$, то рациональноечисло $\underline{a}_n=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ называется нижним n-значным приближением действительного числа, а число $\overline{a}_n=\underline{a}_n+10^{-n}$ – верхним n-значным приближением.

Если $a=-\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha_{n+1}...$, то, соответственно, $\underline{a}_n=-\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n-10^{-n}$, $\overline{a}_n=\underline{a}_n+10^{-n}=-\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$. Легко видеть, что

$$\underline{a}_0\le\underline{a}_1\le\underline{a}_2\le...\le\underline{a}_n\le\underline{a}_{n+1}\le..., \quad (3.1)$$

$$\overline{a}_0\ge\overline{a}_1\ge\overline{a}_2\ge...\ge\overline{a}_n\ge\overline{a}_{n+1}\ge.... \quad (3.2)$$

Множество действительных чисел обозначим R.

Определение 2. Если для двух действительных чисел a и b существует такое целое неотрицательное n_0, что

$$\overline{a}_{n_0}<\underline{b}_{n_0}, \quad (3.3)$$

то $a<b$, или, что то же самое, $b>a$, если же существует такое целое неотрицательное n_0, такое что, то

$$\overline{b}_{n_0}<\underline{a}_{n_0}, \quad (3.4)$$

то $b<a$, или, что то же самое, $a>b$. Если же не выполняется ни первое условие ни второе, то $a=b$.

Следствие. Если выполнено (3.3), то

$$\exists n_0:\forall n\ge n_0 \quad \overline{a}_n<\underline{b}_n, \quad (3.5)$$

аналогично, если выполнено (3.4), то

$$\exists n_0:\forall n\ge n_0 \quad \overline{b}_n<\underline{a}_n. \quad (3.6)$$

Действительно, обращаясь к (3.3) и (3.1), (3.2), получаем

$$\overline{a}_n\le\overline{a}_{n_0}<\underline{b}_{n_0}\le\underline{b}_n,$$

откуда и следует (3.5). Аналогично, из (3.4), (3.1) и (3.2) будем иметь

$$\overline{b}_n\le\overline{b}_{n_0}<\underline{a}_{n_0}\le\underline{a}_n,$$

откуда и следует (3.6).

Лемма о транзитивности. Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.

Действительно, т.к. $a<b$, то

$$\exists n_1\ge 0:\overline{a}_{n_1}<\underline{b}_{n_1},$$

а если $b<c$, то

$$\exists n_2\ge 0:\overline{b}_{n_2}<\underline{c}_{n_2}.$$

Положим $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. Тогда, на основании (3.5) и (3.6)

$$\overline{a}_{n_0}\le\overline{a}_{n_1}<\underline{b}_{n_1}\le\underline{b}_{n_0},\ \overline{b}_{n_0}\le\overline{b}_{n_2}<\underline{c}_{n_2}\le\underline{c}_{n_0},$$

откуда

$$\overline{a}_{n_0}<\underline{b}_{n_0}<\overline{b}_{n_0}<\underline{c}_{n_0}\Rightarrow\overline{a}_{n_0}<\underline{c}_{n_0}.$$

Из последнего равенства следует, что $a<c$.

Если для некоторых действительных a и bсправедливо либо строгое неравенство $a<b$, либо равенство $a=b$, то, объединяя их, пишут нестрогое неравенство $a\le b$, или, что то же самое, $b\ge a$.

Критерий равенства. Для справедливости равенства $a=b$ необходима и достаточна справедливость неравенства

$$\left|\underline{a}_n-\underline{b}_n\right|\le 10^{-n}, \quad (3.7)$$

для любого целого неотрицательного n.

Доказательство. Пусть $a=b$. На основании определения 2 для любого целого неотрицательного n справедливы неравенства

$$\overline{a}_n\ge\underline{b}_n \quad (3.3')$$

и

$$\overline{b}_n\ge\underline{a}_n. \quad (3.4')$$

Из (3.3′) имеем

$$0\le\overline{a}_n-\underline{b}_n=\underline{a}_n+10^{-n}-\underline{b}_n,$$

т.е.

$$\underline{a}_n-\underline{b}_n\ge -10^{-n}. \quad (3.8)$$

Из (3.4′) получим

$$0\le\overline{b}_n-\underline{a}_n=\underline{b}_n+10^{-n}-\underline{a}_n,$$

значит

$$\underline{a}_n-\underline{b}_n\le 10^{-n}. \quad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9) следует (3.7).

Обратно, пусть справедливо (3.7), следовательно справедливы (3.8) и (3.9), из которых следуют (3.3′) и (3.4′) соответственно. Тогда, по определению 2, следует, что $a = b$. Критерий доказан.

Если числа a и b имеют одно и то же представление бесконечной десятичной дробью, то они равны.

Действительно, если представление одно и то же, то для любого целого неотрицательного n $\underline{a}_n = \underline{b}_n$. Из критерия равенства, применяя (3.7), получаем искомое утверждение.

Числа вида

$$a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n 99...9...,\ \alpha_n \neq 9,$$

и

$$b = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...(\alpha_n + 1)00...0...\ ,$$

также будут равными [14–15].

Принцип Архимеда. Для любого действительного числа a существует натуральное число, большее a.

Доказательство. Если $a \le 0$, то это натуральное число может быть равно 1. Если $a > 0$, то, т.к. $\underline{\left(\overline{a}_n\right)}_{n+1} \ge \overline{a}_{n+1}$ $a \le \overline{a}_n < \overline{a}_n + 1$ для любого целого неотрицательного n. Но, поскольку,

$$\overline{a}_n = \frac{p}{q},$$

где p и q – натуральны, то

$$\overline{a}_n + 1 = \frac{p}{q} + 1 = \frac{p+q}{q} \le p + q\ .$$

Поэтому, в качестве искомого натурального числа мы возьмем $p + q$, где p и q – числитель и знаменатель $\overline{a}_n$ соответственно.

Принцип математической индукции. Пусть множество $A \subset N$, N – множество натуральных чисел, которое обладает свойствами:

1°. $1 \in A$;

2°. $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$.

Тогда $A = N$. [3, 4, 14].

Этот принцип берется в качестве аксиомы натуральных чисел [3, 4, 14].

Плотность рациональных чисел во множестве действительных. Для любых действительных чисел a и b таких, что $a < b$, существует рациональное число r, удовлетворяющее неравенству $a < r < b$.

Доказательство. Если $a < b$, то согласно следствию из определения 2, существует натуральное n_0, такое что для любого натурального $n \ge n_0$ справедливо неравенство

$$a \le \overline{a}_n < \underline{b}_n \le b\ .$$

Положив $r_n = \frac{1}{2}\left(\overline{a}_n + \underline{b}_n\right)$, поскольку $\overline{a}_n < r_n < \underline{b}_n$, получаем справедливость неравенства $a < r_n < b$. Таким образом, в качестве r в требуемом неравенстве можно взять любое r_n при $n \ge n_0$.

Замечание. Рациональных чисел r между a и b можно вставить бесконечно много.

Действительно, рациональных чисел между a и b можно вставить бесконечно много, поскольку в качестве рационального r между a и b можно взять любое r_n при натуральных $n \ge n_0$, а их бесконечно много.

Лемма о равенстве. Если две разные десятичные дроби равны, то одна из них конечная, а другая периодическая с периодом 9.

Доказательство. Пусть даны две разные десятичные дроби:

$$a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...\ ,$$

$$b = \pm\beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_n... \text{ и } a = b\ .$$

Пусть l – наименьшее число, для которого $\alpha_l \neq \beta_l$. По критерию равенства $\left|\underline{a}_n - \underline{b}_n\right| \le 10^{-n}$. Далее,

$$\underline{a}_n - \underline{b}_n = \frac{\alpha_l - \beta_l}{10^l} + \frac{\alpha_{l+1} - \beta_{l+1}}{10^{l+1}} + ... + \frac{\alpha_n - \beta_n}{10^n}\ .$$

В силу оценки

$$\left|\frac{\alpha_{l+1} - \beta_{l+1}}{10^{l+1}} + ... + \frac{\alpha_n - \beta_n}{10^n}\right| \le \frac{9}{10^{l+1}}\left(1 + \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{10^{n-l-1}}\right) = \frac{9}{10^{l+1}}\left(\frac{1 - \frac{1}{10^{n-l}}}{1 - \frac{1}{10}}\right) =$$

$$= \frac{1}{10^l}\left(1 - \frac{1}{10^{n-l}}\right) = \frac{1}{10^l} - \frac{1}{10^n},$$

имеем

$$\left|\underline{a}_n - \underline{b}_n\right| \geq \frac{\left|\alpha_l - \beta_l\right|}{10^l} - \left|\frac{\alpha_{l+1} - \beta_{l+1}}{10^{l+1}} + \ldots + \frac{\alpha_n - \beta_n}{10^n}\right| \geq \frac{\left|\alpha_l - \beta_l\right|}{10^l} - \frac{1}{10^l} + \frac{1}{10^n}.$$

Таким образом,

$$\frac{\left|\alpha_l - \beta_l\right| - 1}{10^l} + \frac{1}{10^n} \leq \left|\underline{a}_n - \underline{b}_n\right| \leq \frac{1}{10^n},$$

откуда

$$\left|\alpha_l - \beta_l\right| - 1 \leq 0. \quad (3.10)$$

Пусть, для определенности $\alpha_l < \beta_l$, тогда из (3.10) следует, что

$$\beta_l - \alpha_l - 1 \leq 0, \beta_l \leq \alpha_l + 1 \Rightarrow \beta_l = \alpha_l + 1,$$

и тогда

$$\underline{a}_n - \underline{b}_n = -\frac{1}{10^l} + \frac{\alpha_{l+1} - \beta_{l+1}}{10^{l+1}} + \ldots + \frac{\alpha_n - \beta_n}{10^n} \ \forall n > l. \quad (3.11)$$

Положим в (3.11) $n = l + 1$, отсюда

$$\underline{a}_{l+1} - \underline{b}_{l+1} = -\frac{1}{10^l} + \frac{\alpha_{l+1} - \beta_{l+1}}{10^{l+1}} = \frac{-10 + \alpha_{l+1} - \beta_{l+1}}{10^{l+1}}.$$

Из критерия равенства получаем $\left|-10 + \alpha_{l+1} - \beta_{l+1}\right| \leq 1$. Поскольку

$$\left|-10 + \alpha_{l+1} - \beta_{l+1}\right| = 10 - \alpha_{l+1} + \beta_{l+1} > 0,$$

то либо

$$10 - \alpha_{l+1} + \beta_{l+1} = 0,$$

либо

$$10 - \alpha_{l+1} + \beta_{l+1} = 1.$$

Если

$$10 - \alpha_{l+1} + \beta_{l+1} = 0,$$

то $\beta_{l+1} = \alpha_{l+1} - 10$, что невозможно, поскольку β_{l+1} – цифра от 0 до 9. Если

$$10 - \alpha_{l+1} + \beta_{l+1} = 1,$$

то $9 = \alpha_{l+1} - \beta_{l+1}$, а поскольку α_{l+1} такая же цифра от 0 до 9, то $\alpha_{l+1} = 9$, а $\beta_{l+1} = 0$ и, кроме того:

$$\underline{a}_{l+1} - \underline{b}_{l+1} = -\frac{1}{10^l} + \frac{9}{10^{l+1}} = -\frac{1}{10^{l+1}},$$

и из (3.11)

$$\underline{a}_n - \underline{b}_n = -\frac{1}{10^{l+1}} + \frac{\alpha_{l+2} - \beta_{l+2}}{10^{l+2}} + \ldots + \frac{\alpha_n - \beta_n}{10^n} \ \forall n > l + 1. \quad (3.11')$$

Повторяя те же рассуждения, получим $\alpha_{l+2} = 9$, $\beta_{l+2} = 0$ и т.д.

Из определения 2 следуют свойства равенств: рефлексивности и взаимности, а из леммы о равенстве следует свойство транзитивности [9, 10].

Итак, во множестве чисел введены отношения порядка: «меньше», «больше», «равно» и доказано, что для любых двух действительных чисел выполняется лишь одно из этих трех отношений порядка. Причем для этих отношений порядка выполнены условия транзитивности. Такие множества называются упорядоченными [10, 11].

Следствие из леммы о транзитивности. Если $a \le b$ и $b \le c$, то $a \le c$.

Доказательство следует из леммы о транзитивности и транзитивности равенства.

В дальнейшем, где это возможно, будем исключать из рассмотрения периодические десятичные дроби с периодом 9 [10, 11].

Достаточное условие равенства. Пусть для двух действительных чисел a и b и любого целого неотрицательного n существуют рациональные числа r_n и R_n и целое неотрицательное N, удовлетворяющие неравенствам

$$r_n \le a \le R_n, r_n \le b \le R_n; \qquad (3.12)$$

$$R_n - r_n \le N \cdot 10^{-n}. \qquad (3.13)$$

Тогда, $a = b$.

Доказательство. Предположим противное: $a \ne b$. Пусть для определенности $a < b$. Тогда, на основании (3.1), (3.2), (3.3) и (3.12) имеем

$$r_n \le a \le \overline{a}_{n_0} < \underline{b}_{n_0} \le b \le R_n. \qquad (3.14)$$

По лемме о транзитивности неравенство (3.14) упрощается до неравенства, содержащего лишь рациональные числа:

$$r_n \le \overline{a}_{n_0} < \underline{b}_{n_0} \le R_n. \qquad (3.15)$$

Из (3.15) [17] мы получим

$$\underline{b}_{n_0} - r_n \le R_n - r_n, -\overline{a}_{n_0} \le -r_n, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{b}_{n_0} - \overline{a}_{n_0} \le \underline{b}_{n_0} - r_n \le R_n - r_n.$$

Из неравенства (3.13) и последнего следует, что

$$\underline{b}_{n_0} - \overline{a}_{n_0} \le N \cdot 10^{-n},$$

или

$$10^n \le N \Big/ \left(\underline{b}_{n_0} - \overline{a}_{n_0}\right).$$

Последнее должно быть справедливо для любого целого неотрицательного n. Поскольку $n < 10^n$, то для любого целого неотрицательного n справедливо неравенство

$$n \le N \Big/ \left(\underline{b}_{n_0} - \overline{a}_{n_0}\right),$$

а это противоречит принципу Архимеда.

Теорема непрерывности. Пусть X и Y– непустые множества из R, такие что

$$\forall x \in X, \forall y \in Y \quad x \le y. \qquad (3.16)$$

Тогда

$$\exists a \in R : \forall x \in X, \forall y \in Y \quad x \le a \le y. \qquad (3.17)$$

Доказательство. В силу (3.16) зафиксируем $x^* \in X$ и $y^* \in Y$. Если $y^* \in X$, то $a = y^*$ и (3.17) доказано. Пусть, далее $y^* \notin X$. Отметим, что определить действительное число означает указать правило, по которому с помощью конечного числа операций можно найти n-значное приближение $\underline{a}_n$ числа a для любого целого неотрицательного n, и при этом должно быть выполнено неравенство

$$\underline{a}_{n+1} - \underline{a}_n \le 9 \cdot 10^{-(n+1)}, \qquad (3.18)$$

т.к. это неравенство вытекает из определения бесконечной десятичной дроби [6, 7, 8, 9, 10, 11]. Построим число a, указав способ вычисления его n – значного приближения $\underline{a}_n$. Рассмотрим множество рациональных чисел $\{\underline{x}_n\}$, каждое из которых является n-значным приближением $\underline{x}_n$ всех чисел $x \in X$ между x^* и y^*. Хотя X может быть бесконечным, тем не менее, множество $\{\underline{x}_n\}$ n-значных приближений – конечно. В самом деле, между $\underline{x}_0^*$ и $\overline{y}_0^*$ содержится конечное число рациональных чисел, имеющих n знаков после запятой. Количество таких дробей ограничено сверху числом $(\overline{y}_0^* - \underline{x}_0^*) \cdot 10^n$. В конечном множестве $\{\underline{x}_n\}$ есть наибольший элемент, его мы и выберем в качестве n-значного приближения $\underline{a}_n$:

$$\underline{a}_n = \max\{\underline{x}_n\}. \qquad (3.19)$$

Построенные приближения удовлетворяют неравенству (3.18), т.к. нарушение этого неравенства означало бы, что $\underline{a}_n$ не есть наибольший элемент множества $\{\underline{x}_n\}$. Действительно, пусть

$$\underline{a}_{n+1} - \underline{a}_n > 9 \cdot 10^{-(n+1)}. \qquad (3.20)$$

Существует $\tilde{x} \in X$, такое что

$$\underline{a}_{n+1} = \underline{\tilde{x}}_{n+1} \le \tilde{x}, \qquad (3.21)$$

т.е. в X должно существовать число $\tilde{x}$, такое что его (n+1)-значное приближение с недостатком совпадает с $\underline{a}_{n+1}$. Но тогда

$$\underline{\tilde{x}}_{n+1} - \underline{\tilde{x}}_n \le 9 \cdot 10^{-(n+1)}, \qquad (3.18')$$

потому что $\underline{\tilde{x}}_{n+1}$ и $\underline{\tilde{x}}_n$ – суть $n+1$ и n-значные приближения $\tilde{x}$. Отсюда, получаем

$$\underline{\tilde{x}}_n \ge \underline{\tilde{x}}_{n+1} - 9 \cdot 10^{-(n+1)} = \underline{a}_{n+1} - 9 \cdot 10^{-(n+1)} > \underline{a}_n,$$

а значит

$$\underline{\tilde{x}}_n > \underline{a}_n. \qquad (3.22)$$

Здесь мы выразили $\underline{\tilde{x}}_n$ из (3.18′), воспользовались (3.21), а, затем, и (3.20). Неравенство (3.22) противоречит (3.19).

Итак, число a определено.

Докажем теперь, что построенное число a удовлетворяет (3.17).

Сначала, докажем, что

$$\forall x \in X \ x \le a$$

от противного. Пусть существует число $x \in X$, такое что $x > a$. Поэтому, что существует целое неотрицательное m, такое что $\underline{x}_m > a_m \ge \underline{a}_m$. Но последнее невозможно в силу (3.19).

Теперь докажем, что

$$\forall y \in Y \ y \ge a$$

от противного. Пусть существует число $y \in Y$, такое что $y < a$. Это значит, что существует целое неотрицательное p, такое что $\overline{y}_p < \underline{a}_p$. Но тогда, существует $\hat{x} \in X$, такое что $\underline{a}_p = \underline{\hat{x}}_p \le \hat{x}$. С другой стороны, $y \le \overline{y}_p$. Т.о.,

$$y \le \overline{y}_p < \underline{a}_p \le \hat{x},$$

или $y < \hat{x}$, что противоречит (3.16). Последнее завершает доказательство (3.17).

Лемма о числе. Для любого действительного числа a и любых целых неотрицательных m и n справедливо неравенство

$$\underline{a}_m \le a \le \overline{a}_n. \qquad (3.23)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование a в (3.23) следует из теоремы непрерывности. Действительно, пусть множество $X = \{\underline{a}_m\}$, а множество $Y = \{\overline{a}_n\}$. Нужно доказать лишь справедливость (3.16), т.е.

$$\underline{a}_m \le \overline{a}_n, \qquad (3.16')$$

для любых целых неотрицательных m и n. Но из (3.1) и (3.2) можно заключить, что

$$\underline{a}_m \le \underline{a}_{m+m} < \overline{a}_{m+n} \le \overline{a}_n, \qquad (3.16'')$$

откуда следует неравенство более сильное, чем (3.16′):

$$\underline{a}_m < \overline{a}_n. \qquad (3.16''')$$

Единственность a из (3.23) докажем от противного. Пусть существуют a и b не обязательно равные между собой, удовлетворяющие (3.23). Поскольку b удовлетворяет (3.23), то

$$\underline{a}_m \le b \le \overline{a}_n. \qquad (3.23')$$

Положив, теперь, в (3.23) и (3.23′) $m = n$, получим

$$\underline{a}_n \le a \le \overline{a}_n, \underline{a}_n \le b \le \overline{a}_n. \qquad (3.23'')$$

Поскольку,

$$\overline{a}_n - \underline{a}_n = 10^{-n},$$

то на основании (3.23″), последнего равенства и достаточного условия равенства заключаем, что $a = b$.

Лемма Дедекинда. Пусть множества X и Y, состоящие из рациональных чисел таковы, что:

а) любое рациональное число попадает либо в X, либо в Y;

б) множества X и Y непустые;

в) $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y \ \ x < y$. (3.24)

Тогда, существует единственное действительное число a такое, что

$$\forall x \in X \text{ и } \forall y \in Y \ \ x \le a \le y. \qquad (3.25)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (3.24) следует справедливость (3.16), поэтому выполнено (3.17). Следовательно, существование a из (3.25) прямо следует из теоремы непрерывности.

Докажем единственность a из (3.25). Рассуждаем от противного, т.е. пусть существует $b \ne a$, удовлетворяющее (3.25), а именно:

$$\forall x \in X \text{ и } \forall y \in Y \ \ x \le b \le y. \qquad (3.25')$$

Пусть для определенности $a < b$. Согласно плотности рациональных чисел во множестве действительных, существует рациональное r, удовлетворяющее неравенству $a < r < b$, и тогда $x \le a < r < b \le y$ для любого $x \in X$ и любого $y \in Y$. Поскольку $r > a$, то в силу (2.25) r не может принадлежать X. Поскольку $r < b$, то в силу (2.25′) r не может принадлежать Y. Т.о., $r \notin X \cup Y$, что противоречит условию и лемма доказана.

Теорема Дедекинда. Пусть множества X и Y, состоящие из действительных чисел таковы, что:

а) любое действительное число попадает либо в X, либо в Y;

б) множества X и Y непустые;

в) $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ $x < y$. (3.26)

Тогда, существует единственное действительное число a такое, что

$$\forall x \in X \text{ и } \forall y \in Y \quad x \le a \le y. \quad (3.27)$$

Доказательство. Из неравенства (3.26) следует справедливость (3.16), поэтому выполнено (3.17). Следовательно, существование a из (3.27) прямо следует из теоремы непрерывности.

Докажем единственность a из (3.27). Рассуждаем от противного, т.е. пусть существует $b \ne a$, удовлетворяющее (3.27), а именно:

$$\forall x \in X \text{ и } \forall y \in Y \quad x \le b \le y. \quad (3.27')$$

Пусть для определенности $a < b$. Согласно плотности рациональных чисел во множестве действительных, существует рациональное r, удовлетворяющее неравенству $a < r < b$, и тогда $x \le a < r < b \le y$ для любого $x \in X$ и любого $y \in Y$. Поскольку $r > a$, то в силу (3.27) r не может принадлежать X. Поскольку $r < b$, то в силу (2.27′) r не может принадлежать Y. Таким образом, $r \notin X \cup Y$, что противоречит условию и теорема доказана.

Замечание. Лемма Дедекинда, которой нет в [16], на наш взгляд, очень важна, т.к. она фактически устанавливает связь между подходами к определению действительного числа при помощи бесконечных десятичных дробей и определением действительного числа через сечения множества рациональных чисел по Дедекинду [14, 15].

4. Геометрическая интепретация действительных чисел

Геометрически множество действительных чисел изображается направленной (ориентированной) прямой, а отдельные числа – точками этой прямой. Поэтому, совокупность действительных чисел часто называют числовой прямой, а также числовой или действительной осью, а отдельные числа – ее точками. При такой интерпретации действительных чисел иногда вместо a меньше b (b больше a) говорят, что точка a лежит левее точки b (b лежит правее a).

Пусть a и b – действительные числа и $a < b$. Тогда интервал и отрезок определяются равенствами $(a;b) = \{x : a < x < b\}$ и $[a;b] = \{x : a \le x \le b\}$ соответственно. В свою очередь, полуинтервалы аналогично определяются равенствами

$$(a;b] = \{x : a < x \le b\}, [a;b) = \{x : a \le x < b\}.$$

Интервал, отрезок и полуинтервалы называются конечными промежутками. Часто термин «конечные» опускается. Длину этих промежутков будем считать $b - a$.

Бесконечные промежутки определяются равенствами:

$$(a;+\infty) = \{x : x > a\},$$
$$[a;+\infty) = \{x : x \ge a\}, (-\infty;b) = \{x : x < b\}, (-\infty;b] = \{x : x \le b\},$$

и $(-\infty;+\infty) = R$.

Замечание. Отметим, что в теореме Дедекинда в качестве множества действительных чисел, которое состоит из X и Y, не обязательно брать всю действительную прямую. В качестве этого множества можно взять любой промежуток действительной прямой, например $(a;+\infty)$.

Список литературы

1. Андронов И.К., Окунев А.К. Арифметика рациональных чисел: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1971. – 399 с.
2. Бесов О.В. Лекции по математическому анализу. – М.: Физматлит, 2014. – 480 с.
3. Бесов О.В. Лекции по математическому анализу. Ч. 1: учеб. пособие.– М.: МФТИ, 2004. – 328 с.
4. Иванов Г.Е. Лекции по математическому анализу. Ч. 1: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2000. – 359 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов. – М.: Наука. Гл. ред физ.-мат. лит., 1989. – 736 с.
6. Курс лекций: элементы дискретной математики. – М.: МГТУ «МАМИ», 2006 – 272 с.
7. Ландау Э. Основы анализа. – М.: ИЛ, 1947. – 182 с.
8. Петрович А.Ю. Лекции по математическому анализу. Ч. 1: учебное пособие. – М.: МФТИ, 2012. – 275 с.
9. Рождественский Б.Л. Лекции по математическому анализу. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972.– 544 с.
10. Рождественский Б.Л. Лекции по математическому анализу. Ч. 1: учеб. пособие. – М. МИФИ, 1967. – 264 с.
11. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: учеб. пособие для вузов.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 816 с.
12. Ульянова Т.В. Методические акценты в преподавании темы «Действительные числа» на профильном уровне // Омский научный вестник. – № 4 – 99. – 2011. – С. 202 – 204.
13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 607 с.
14. Черняев А.П. Действительные числа и теорема Кантора.: учебно-методическое пособие. – М.: МФТИ, 2015. – 48 с.
15. Черняев А.П. Действительные числа: учебно-методическое пособие. – М.: МФТИ, 2010. – 46 с.
16. Яковлев Г.Н. Вещественные числа. Методические указания для студ. 1 курса: учебно-методическое пособие. – М.: МФТИ, 1972.– 23 с.
17. Яковлев Г.Н. Лекции по математическому анализу. Ч. 1: учеб. пособие для вузов.– М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2004.– 340 с.
18. Яковлев Г.Н. Лекции по математическому анализу. Ч. 1: учеб. пособие.– М.: Физматлит, 2001.– 400 с.
19. Яковлев Г.Н. Числовые последовательности и непрерывные функции: учеб. пособие.– М.: МФТИ, 1992.– 60 с.